

Meccanica

Jacopo Basso Ricci

March 15, 2026

Indice

1	Introduzione	2
1.1	Meccanica	2
2	Un po' di definizioni e assiomi	2
2.1	Matematica	2
2.1.1	Moto 2d	3
2.1.2	Moto 3d	4
3	Cinematica	4
3.1	Moto rettilineo uniforme	4
3.2	Moto rettilineo uniformemente accelerato	5
3.3	Moto rettilineo smorzato	5
3.4	Moto armonico	6
3.5	Moto 2d	6
3.5.1	Moto Circolare	8
3.5.2	Moto Circolare Uniforme	8
3.5.3	Moto Circolare Uniformemente accelerato	9
3.5.4	Il vettore velocità angolare	9
4	Dinamica	10
4.1	Nota importante	10
5	Quantità di moto	10
6	Definiamo ora un po' di forze	11
7	Studiamo 2 moti che sono casi patologici	13
8	Energia e Lavoro	14
8.1	Forze conserivative	15
9	Momenti	16
10	Moti relativi	17
11	Dinamica dei sistemi di punti materiali	19
12	Gli urti	21
12.1	Conservazione dell'eneriga in un urto	22
12.2	Urti nel sitema di riferimento	22
12.3	Urti speciali	23
13	Corpo rigido	25



14 Il pendolo fisico	27
15 Rotolamento	28
15.1 Forza costante orizzontale applicata all'asse passante CM	28
15.2 Momento costante applicato all'asse	29
15.3 Energia di un corpo in moto di puro rotolamento	29
15.4 Attrito volvente	29
16 Precessione	29
17 Forze centrali	30
17.1 Proprietà notevoli delle forze centrali	30
18 Le leggi di Keplero	31
18.1 Newton	31
18.2 Potere è volere	33



1 Introduzione

Storicamente si passa da uno studio qualitativo della fisica (si descrive a parole un fenomeno) a uno studio quantitativo che usa la matematica ed i numeri. Sempre per ragioni storiche più che fisiche, si è divisa la materia in 4 macro categorie:

- Meccanica: Moti, Gravitazione
- Onde e oscillazioni: Processi oscillatori
- Termodinamica: Temperatura, Calore, Entropia
- Elettromagnetismo: Campi elettrici e magnetici, Circuiti

Limiti di applicabilità?

Fenomeni a livello atomico e subatomico $d \sim 10^{-10}m$

Fenomeni a velocità prossime a quelle della luce $c \sim 3 * 10^8 m/s$

1.1 Meccanica

Lo studio si dividerà in 2 parti:

- Cinematica: Descrizione del moto a prescindere dalle sue cause.
- Dinamica: Studio del moto a partire dalla cause.

2 Un po' di definizioni e assiomi

Assioma di Tempo Assolto

Il tempo assoluto per sua natura scorre in modo separato e del tutto indipendente da ogni cosa esterna.

Assioma di Spazio Assolto

Lo spazio assoluto è per sua natura indipendente e immutabile.

Definizione 2.1 — Punto Materiale

Corpo di dimensioni trascurabili rispetto allo spazio nel quale si muove.

2.1 Matematica

Definizione 2.2 — Grandezze Scalari

Grandezze caratterizzate da un solo numero chiamato modulo o intensità.

Definizione 2.3 — Grandezze Vettoriali

Grandezze caratterizzate da un vettore: modulo e orientamento (direzione e verso).

**Definizione 2.4 — Momento di un vettore**

Il momento di un vettore rispetto un polo O . (Lettere casualmente scelte)

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$|\vec{M}| = rF \sin \theta$$

Definizione 2.5 — Versori

Vettori di modulo unitario $|\hat{U}_a| = 1$

Definizione 2.6 — Coordinate cartesiane

Coordinate espresse come somma di versori perpendicolari.

$$|\hat{U}_x| = |\hat{U}_y| = |\hat{U}_z| = 1$$

$$\hat{U}_x \times \hat{U}_y = \hat{U}_z, \hat{U}_y \times \hat{U}_z = \hat{U}_x, \hat{U}_z \times \hat{U}_x = \hat{U}_y$$

Definizione 2.7 — Coordinate polari

Coordinate espresse come modulo di un vettore e gli angoli ad esso associati in senso antiorario rispetto gli assi.

2.1.1 Moto 2d

Coordinate cartesiane:

$$\vec{r} = x\hat{U}_x + y\hat{U}_y$$

Coordinate polari:

$$\vec{r} : r, \theta$$

Conversione coordinate cartesiane \Rightarrow polari

$$\vec{r} = x\hat{U}_x + y\hat{U}_y \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Conversione coordinate polari \Rightarrow cartesiane

$$r, \theta \Rightarrow \vec{r} = r(\cos \theta \hat{U}_x + \sin \theta \hat{U}_y)$$

La derivata di un versore

$$\frac{d\hat{U}_x}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \hat{U}_\theta$$



2.1.2 Moto 3d

Coordinate cartesiane:

$$\vec{r} = x\hat{U}_x + y\hat{U}_y + z\hat{U}_z$$

Coordinate polari (in ordine modulo, angolo polare [asse Z], angolo azimutale [piano xOy]):

$$\vec{r} : r, \theta, \varphi$$

Conversione coordinate cartesiane \Rightarrow polari

$$\vec{r} = x\hat{U}_x + y\hat{U}_y + z\hat{U}_z \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \theta = \arccos \frac{z}{r}, \varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

Conversione coordinate polari \Rightarrow cartesiane

$$\vec{r} : r, \theta, \varphi \Rightarrow \vec{r} = r(\sin \theta \cos \varphi \hat{U}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{U}_y + \cos \theta \hat{U}_z)$$

3 Cinematica

Definizione 3.1 — Distanza

Grandezza Scalare

$$|\Delta \vec{x}| = |\vec{x}_f - \vec{x}_i|$$

Definizione 3.2 — Spostamento

Grandezza Vettoriale

$$\Delta \vec{x} = \vec{x}_f - \vec{x}_i$$

Definizione 3.3 — Velocità

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

Definizione 3.4 — Accelerazione

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

3.1 Moto rettilineo uniforme

Dimostrazione 3.1 — Moto rettilineo uniforme

Nel moto rettilineo uniforme il corpo si muove lungo una retta, quindi per conoscere la sua posizione basta identificare la distanza dall'origine.

$$a = 0$$

$$v = \text{const.}$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t_f} v dt = v \Delta t$$



3.2 Moto rettilineo uniformemente accelerato

In questo caso il corpo è sempre in un moto rettilineo, vale ciò detto sopra per i moti rettilinei.

Dimostrazione 3.2 — Moto rettilineo uniformemente accelerato

$$a = \text{const.}$$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t_f} a dt = v_0 + a\Delta t$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t_f} v(t) dt = x_0 + \int_{t_0}^{t_f} (v_0 + a\Delta t) dt = x_0 + v_0\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2$$

Inoltre è utile tenere a mente una comoda formula facilmente ricavabile che semplifica l'equazioni togliendo la dipendenza dal tempo.

$$\Delta x = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2a}$$

3.3 Moto rettilineo smorzato

In questo caso si assume $a(t) = -kv$. La decelerazione avviene proporzionalmente alla velocità.

Dimostrazione 3.3 — Moto rettilineo smorzato

Per semplificare i conti si assuma:

$$t_0 = 0, x_0 = 0, v_0 > 0$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv$$

Questa è una equazione differenziale del primo ordine che si risolve "portando tutti i termini con la v da un lato".

$$\frac{1}{v} dv = -k dt$$

Integriamo a destra e sinistra.

$$\int_{v_0}^v \frac{1}{v} dv = -k \int_0^t dt$$

$$\ln(v) - \ln(v_0) = \ln \frac{v}{v_0} = -kt$$

$$v(t) = v_0 e^{-kt}$$

Per conoscere la posizione dobbiamo integrare nuovamente. Per mostrare l'integrale notevole moltiplichiamo e dividiamo per k .

$$x(t) = \frac{-v_0}{k} \int_0^t -k e^{-kt} dt$$

$$x(t) = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt})$$

Si noti che il punto si ferma a $x = \frac{v_0}{k}$ dopo un tempo teoricamente infinito.



3.4 Moto armonico

Il moto armonico è un moto rettilineo che avviene con uno spostamento sinusoidale. In tale moto A , ω_p , ϕ sono costanti. In ordine Ampiezza, Pulsazione, Fase Iniziale.

Definizione 3.5 — Fase

$$\omega = \omega_p t + \phi$$

Dimostrazione 3.4 — Moto armonico

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin \omega \\ v(t) &= \frac{dx}{dt} = A\omega_p \cos \omega \\ a(t) &= \frac{dv}{dt} = -A\omega_p^2 \sin \omega = -\omega_p^2 x(t) \end{aligned}$$

Si noti che come detto il moto è sinusoidale, inoltre è limitato nello spazio:

$$-1 \leq \sin \omega \leq 1 \Rightarrow -A \leq x(t) \leq A$$

Il periodo di questo moto periodico risulta essere:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_p}$$

Per i conti è utile risordare che esiste una relazione tra la posizione e la velocità iniziali e A , ϕ . Questo perché osservando la relazione dell'accelerazione vediamo un'equazione differenziale del primo ordine che caratterizza il moto.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_p^2 x = 0$$

3.5 Moto 2d

Iniziamo ora a considerare un moto nel piano.

**Dimostrazione 3.5 — Moto 2d**

$$\vec{r} = x\hat{U}_x + y\hat{U}_y$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{U}_x + \frac{dy}{dt}\hat{U}_y$$

Ora consideriamo un nuovo versore \hat{U}_r che è direzionato da O al punto materiale.

$$\vec{v} = \frac{dr\hat{U}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{U}_r + r\frac{d\hat{U}_r}{dt}$$

A questo punto siamo costretti a derivare il versore \hat{U}_r

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{U}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{U}_t$$

Definizione 3.6 — Velocità radiale

$$\vec{v}_r = \frac{dr}{dt}\hat{U}_r$$

Definizione 3.7 — Velocità trasversale

$$\vec{v}_t = r\frac{d\theta}{dt}\hat{U}_t$$

Ora valutiamo l'accelerazione ricordandoci che la velocità è sempre tangente alla curva. Dichiaro che $T = \text{tg}$, $N = \text{norm}$.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv\hat{U}_T}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{U}_t + v\frac{d\hat{U}_T}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{U}_T + v\frac{d\phi}{dt}\hat{U}_N$$

Poichè in ogni punto la traiettoria può essere localmente approssimata ad un arco di circonferenza.

$$ds = R d\phi \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{U}_T + \frac{v^2}{R}\hat{U}_N$$

Definizione 3.8 — Accelerazione Tangenziale

$$\vec{a}_T = \frac{dv}{dt}\hat{U}_T$$

Definizione 3.9 — Accelerazione Normale o centripeta

$$\vec{a}_N = \frac{v^2}{R}\hat{U}_N$$



3.5.1 Moto Circolare

La traiettoria in questo caso è una circonferenza che per semplicità è posta con centro in O . Coordinate cartesiane:

$$x(t) = R \cos \theta(t)$$

$$y(t) = R \sin \theta(t)$$

Coordinate polari:

$$r = R, \theta = \theta(t)$$

Coordinate curvilinee: Definisco un "punto di partenza" e identificano la posizione come distanza da esso.

$$s(t) = R\theta(t)$$

Dimostrazione 3.6 — Moto Circolare

La velocità

$$\vec{v} = \frac{dR}{dt} \hat{U}_r + R \frac{d\theta}{dt} \hat{U}_t = R \frac{d\theta}{dt} \hat{U}_t$$

Definizione 3.10 — Velocità angolare

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Piccola osservazione:

$$\omega = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} \Rightarrow R\omega = \frac{ds}{dt} = v$$

Ne risulta quindi:

$$\vec{v} = R\omega \hat{U}_t$$

Valutiamo l'accelerazione

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \hat{U}_T + \frac{v^2}{R} \hat{U}_N = R \frac{d\omega}{dt} \hat{U}_T + \omega^2 R \hat{U}_N$$

Definizione 3.11 — Accelerazione angolare

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

Anche in questo caso una piccola osservazione.

$$\alpha = \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} \Rightarrow a_T = \frac{a_T}{R}$$

Ne risulta

$$\vec{a} = R\alpha \hat{U}_T + R\omega^2 \hat{U}_N$$

3.5.2 Moto Circolare Uniforme

La traiettoria è una circonferenza e la velocità ha modulo costante.



Dimostrazione 3.7 — Moto Circolare Uniforme

Osserviamo prima il moto in un sistema di riferimento polare che ha per $r = R$.

$$\omega = \text{const.}$$

$$\theta = \theta_0 + \int_{t_0}^{t_f} \omega = \theta_0 + \omega \Delta t$$

Ora valutiamo la velocità in modulo sfruttando le coordinate curvilinee:

$$s = R\theta = R(\theta_0 + \omega \Delta t)$$

$$v = \frac{ds}{dt} = R\omega = \text{const.}$$

Il modulo della velocità è costante, ma l'accelerazione non è 0.

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \hat{U}_T + \frac{v^2}{R} \hat{U}_N = \frac{v^2}{R} \hat{U}_N = \omega^2 R \hat{U}_N$$

Osservazione: il moto è periodico, questo non implica che sia armonico.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v}$$

3.5.3 Moto Circolare Uniformemente accelerato

La traiettoria è una circonferenza e il modulo della velocità aumenta linearmente.

Dimostrazione 3.8 — Moto Circolare Uniformemente accelerato

Valutiamo prima il moto utilizzando un sistema di riferimento polare che ha per $r = R$.

$$\alpha = \text{const.}$$

$$\omega = \omega_0 + \int_{t_0}^{t_f} \alpha dt = \omega_0 + \alpha \Delta t$$

$$\theta = \theta_0 + \int_{t_0}^{t_f} \omega dt = \theta_0 + \omega_0 \Delta t + \frac{1}{2} \alpha (\Delta t)^2$$

Ora, come prima, valutiamo il moto con un sistema di riferimento in coordinate curvilinee.

$$s = R\theta$$

$$v = \frac{ds}{dt} = R\omega$$

Valutiamo l'accelerazione

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \hat{U}_T + \frac{v^2}{R} \hat{U}_N = \alpha R \hat{U}_T + (\omega_0 + \alpha \Delta t)^2 R \hat{U}_N$$

3.5.4 Il vettore velocità angolare

Per ora abbiamo definito solamente il modulo di tale oggetto ignorandone completamente l'orientamento.

**Definizione 3.12 — Velocità angolare**

In modulo

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

La direzione è ortogonale al piano su cui stà avvenendo la rotazione.

Il verso è tale che dalla "punta" il moto risulti sempre antiorario.

In questo modo otteniamo:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

4 Dinamica

Lo studio del motivo dei moti a partire dalle cause necessita delle leggi di Newton.

Definizione 4.1 — I legge di Newton

Un corpo permane nel suo stato di quiete o moto rettilineo uniforme a meno che non intervenga una forza esterna.

Definizione 4.2 — II legge di Newton

Una forza produrrà una accelerazione di modulo inversamente proporzionale alla massa, direttamente proporzionale all'intensità della forza e con stessa direzione e verso.

$$\vec{F}_{TOT} = m\vec{a}$$

Definizione 4.3 — III legge di Newton

Dati 2 corpi A e B. Se il corpo A esercita una forza sul corpo B allora il corpo B esercita una forza uguale e contraria sul corpo A.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

4.1 Nota importante

$\vec{a} = 0 \nRightarrow$ Nessuna forza agisce sul corpo

$$\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{TOT} = 0$$

5 Quantità di moto

Definizione 5.1 — Quantità di moto

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Possiamo quindi riscrivere la seconda legge di Newton.

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

In questo modo ci accorgiamo che:

$$\vec{F}dt = d\vec{p}$$

**Definizione 5.2 — Impulso**

$$\vec{J} = \int_{t_0}^{t_f} \vec{F} dt$$

Da qui otteniamo l'enunciato del teorema dell'Impulso.

Teorema 5.1 — Impulso

$$\vec{J} = \Delta \rho = \int_{t_0}^{t_f} \vec{F} dt$$

6 Definiamo ora un po' di forze

Definizione 6.1 — Forza peso

Sappiamo che su ogni corpo in prossimità della superficie terrestre agisce un'accelerazione di gravità.

$$\begin{aligned}\vec{a} &= -g\hat{U}_z \\ \vec{P} &= m\vec{a} = -mg\hat{U}_z\end{aligned}$$

Definizione 6.2 — Reazione vincolare

Chiamata anche Normale essa è la forza che permette ad un oggetto di non sprofondare in ogni piano. Questa non verrà discussa oltre qui, ma è semplicemente la forza esercitata da un vincolo.

Nel caso specifico di un corpo su un piano.

$$\vec{F}_T = \vec{P} + \vec{N} = 0$$

Definizione 6.3 — Attrito Radente

Se applichiamo una forza orizzontale al piano ci accorgiamo che il corpo non si muove fino al superamento di un valore critico.

$$|\vec{F}| > \mu_s N$$

Ci accorgiamo che il corpo non si muove, quindi esiste \vec{f}_s che è adattiva rispetto alla forza applicata.

$$\vec{F} + \vec{f}_s = 0 \Rightarrow F = f_s \text{ finché } F \leq \mu_s N$$

Si osserva che esiste una forza di attrito anche durante il moto che si oppone allo stesso. Sperimentalmente:

$$\begin{aligned}\vec{f}_d &= -\mu_d \left| \vec{N} \right| \hat{U}_x \\ \mu_d &< \mu_s\end{aligned}$$



Definizione 6.4 — Attrito Viscoso

Resistenza che un fluido (liquido o gas) oppone al moto. Per piccole velocità e per un corpo soggetto alla gravità vale:

$$\vec{f}_v = -b\vec{v}$$

Per comprendere come questo ha effetti su un moto che subisce solo l'attrito viscoso e la forza peso che sia verticale facciamo uno studio del moto.

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{f}_v = m\vec{a}$$

Se togliamo la notazione vettoriale, poichè il moto avviene su una retta, prestando attenzione ai segni

$$-mg + bv = -ma$$

$$-\frac{b}{m}v + g = \frac{dv}{dt}$$

$$dt = \frac{dv}{g - \frac{b}{m}v}$$

Integrando da tutte e 2 le parti considerando $t_0 = 0$ e $v_0 = 0$ otteniamo che:

$$v = m\frac{g}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)$$

Definizione 6.5 — Forza elastica

Una forza elastica è di tipo centrale.

$$\vec{F}_e = -k\Delta\vec{x} = -k(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

Con \vec{x}_0 che è la posizione di riposo della molla. L'equazione del moto di un oggetto soggetto alla sola forza elastica risulta:

$$\vec{F}_e = m\vec{a}$$

Anche in questo caso il moto avviene su una retta quindi possiamo evitare la notazione vettoriale

$$-kx = ma$$

$$a + \frac{k}{m}x = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Questa è l'equazione differenziale di un moto armonico con

$$\omega_p = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



7 Studiamo 2 moti che sono casi patologici

Dimostrazione 7.1 — Pendolo semplice

Una massa puntiforme vincolata ad un filo ideale soggetta alla forza peso costituisce il sistema studiato. Poichè il moto è circolare conviene usare le coordinate con assi legati al moto del corpo.

$$F_c : T - mg \cos \theta = ma_N \Rightarrow a_N = \frac{T - mg \cos \theta}{m}$$

$$F_t : -mg \sin \theta = ma_T \Rightarrow a_T = -g \sin \theta$$

Cosideriamo per ora la seconda equazione:

$$a_t + g \sin \theta = 0 \Rightarrow L \frac{d^2 \theta}{dt^2} + g \sin \theta = 0$$

Questa equazione differenziale ricorda quella del moto armonico soltanto se applichiamo approssimazioni per piccoli angoli: $\sin \theta \approx \theta$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

Così facendo ora conosciamo tutto di questo moto.

Dimostrazione 7.2 — Pendolo conico

Un pendolo viene mosso in moto circolare uniforme con un angolo rispetto la verticale θ .

$$\vec{F} = \vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$$

Scomponiamo questa equazione vettoriale nelle sue 3 componenti.

$$F_z = T \cos \theta - mg = 0$$

$$F_n = T \sin \theta = ma_n = m \frac{v^2}{R}$$

$$F_t = 0$$

Le 2 prime equazioni ci permettono di osservare che:

$$T = \frac{mg}{\cos \theta} = m \frac{v^2}{R \sin \theta}$$

$$v^2 = gR \tan \theta$$

Otteniamo quindi

$$v = \pm \sqrt{gR \tan \theta} = \pm \sqrt{gL \sin \theta \tan \theta}$$

Sfruttando le approssimazioni per angoli piccoli ricaviamo

$$v = \theta \sqrt{gL}$$

$$\omega = \theta \frac{\sqrt{gL}}{L \sin \theta}$$



8 Energia e Lavoro

Definizione 8.1 — Lavoro

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s}$$

Si parla di:

- Lavoro motore: $W > 0 \implies \theta < \frac{\pi}{2}$
- Lavoro nullo: $W = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{2}$ o $\vec{F} = 0$ o $\Delta \vec{s} = 0$
- Lavoro resistente: $W < 0 \implies \theta > \frac{\pi}{2}$

Se generalizziamo a curve qualunque e forze qualunque possiamo dire:

$$W \approx \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{s}_i$$

Al limite questo diventa:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Notiamo che

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \\ W &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^n \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^n W_i \end{aligned}$$

Definizione 8.2 — Potenza

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Introduciamo ora un teorema molto importante.

Teorema 8.1 — Energia cinetica

$$W = \Delta K$$

Dimostrazione 8.1 — Energia cinetica

Introduciamo la seconda legge della dinamica nella definizione di lavoro

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_t ds = ma_t ds = m \frac{dv}{dt} ds = m dv \frac{ds}{dt} = m v dv$$

Possiamo quindi integrare

$$W_{AB} = \int_{v_0}^{v_f} m v dv = \frac{1}{2} m \Delta v^2 = \Delta K$$

**Dimostrazione 8.2 — Lavoro della forza peso**

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{s} = m\vec{g} \cdot \int_A^B d\vec{s} = -mg\hat{U}_z \cdot \vec{s}_{AB}$$

$$W = -mg(z_B - z_A) = -mg\Delta z$$

Definizione — Energia potenziale gravitazionale

$$U_p = mgz$$

$$W = -\Delta U_p$$

Dimostrazione 8.3 — Lavoro della forza elastica

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B -k\vec{s} \cdot d\vec{s} = \int_A^B -ks ds = -\frac{1}{2}k\Delta s^2$$

Definizione — Energia potenziale elastica

$$U_e = ks^2$$

$$W = -\Delta U_e$$

Dimostrazione 8.4 — Lavoro della forza d'attrito

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B -\mu N \hat{U}_s \cdot d\vec{s} = -\mu N \int_A^B ds = -\mu N \Delta s$$

In questo caso non esiste un modo per definire un energia potenziale.

8.1 Forze conservative

Osserviamo che tutte le forze viste fin ora ammettono l'esistenza di una Energia potenziale che è determinata univocamente dalla posizione, ma la forza di attrito non ammette la stessa funzione. Questo perché il lavoro compiuto dal punto A al punto B non dipendono solamente da essi, ma anche dal percorso compiuto.

Definizione 8.3 — Forza conservativa

Una forza è conservativa se il lavoro di tale forza NON dipende dal percorso, ma solo dalla posizione iniziale e finale.

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

Il lavoro in un qualunque circuito è 0



Lavorare con forze conservative ci permette di:

$$\begin{aligned} W &= \Delta K = -\Delta U \\ K_b - K_a &= U_a - U_b \\ K_a + U_a &= K_b + U_b \\ E_{Ma} &= E_{Mb} \end{aligned}$$

Abbiamo quindi identificato che se nel nostro sistema se intervengono solo forze conservative l'energia si conserva.

Consideriamo il lavoro di una forza conservativa

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Nel caso monodimensionale

$$dW = Fdx = -dU \Rightarrow F = \frac{-dU}{dx}$$

Questo può essere generalizzato nelle 3 dimensioni

$$\vec{F} = -\nabla U$$

Cosa succede nel caso generale in cui sono presenti anche forze non conservative?

$$\begin{aligned} W &= W_{cons} + W_{non-cons} \\ W_{non-cons} &= W - W_{cons} \\ W_{non-cons} &= K_b - K_a + U_b - U_a \\ W_{non-cons} &= E_{Mb} - E_{Ma} = \Delta E_M \end{aligned}$$

9 Momenti

Definizione 9.1 — Momento angolare

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Definizione 9.2 — Momento di una forza

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Studiamo ora la variazione del momento angolare nel tempo. Questo studio lo introduciamo perchè studiando le 2 grandezze ci rendiamo conto che:

$$[\vec{L}] = Kg \frac{m^2}{s}$$

$$[\vec{M}] = Kg \frac{m^2}{s^2}$$

Queste 2 grandezze differiscono solo di un $\frac{1}{s}$ in unità fondamentali quindi ci deve essere un legame tra $\frac{d\vec{L}}{dt}$ e \vec{M}

**Teorema 9.1 — Momento angolare**

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Dimostrazione 9.1 — Teorema del momento angolare

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} \right) + \left(\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = (\vec{v} \times m\vec{v}) + (\vec{r} \times m\vec{a}) = 0 + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

Teorema 9.2 — Momento dell'impulso

$$\Delta\vec{L} \simeq \vec{r} \times \vec{J}$$

Dimostrazione 9.2 — Teorema del momento dell'impulso

$$d\vec{L} = \vec{M} dt$$

Integriamo a destra e sinistra

$$\int_{t_0}^{t_f} \vec{M} dt = \Delta\vec{L}$$

Scomponiamo il momento

$$\int_{t_0}^{t_f} \vec{M} dt = \int_{t_0}^{t_f} (\vec{r} \times \vec{F}) dt \simeq \vec{r} \times \int_{t_0}^{t_f} \vec{F} dt = \vec{r} \times \vec{J}$$

10 Moti relativi

Questo capitolo si concentra sulla domanda: "Le leggi della Fisica dipendono dal sistema di riferimento scelto?".

Da questo momento in poi utilizzeremo 2 sistemi di riferimento il primo "fisso" che ha come centro O e assi x, y, z ; il secondo in moto rispetto a O', x', y', z' .

Teorema 10.1 — Posizione relativa

$$\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}'$$

- \vec{r} posizione del punto P nel sistema di riferimento O
- $\vec{r}_{O'}$ posizione del punto O' nel sistema di riferimento O
- \vec{r}' posizione del punto P nel sistema di riferimento O'

Ora valutiamo la velocità rispetto che sappiamo essere $\frac{d\vec{r}}{dt}$



Teorema 10.2 — Velocità relativa

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

Ora farò la scomposizione solo per l'asse x, ma lo stesso procedimento deve essere fatto per ogni asse.

$$= \frac{dx_{O'}}{dt} \hat{U}_x + \left(\frac{dx'}{dt} \hat{U}_{x'} + x' \frac{d\hat{U}_{x'}}{dt} \right) \dots = \vec{v}_{O'} + \vec{v}' + \left(x' \frac{d\hat{U}_{x'}}{dt} \dots \right) = \vec{v}_{O'} + \vec{v}' (\vec{\omega} \times \hat{U}_{x'} \dots)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Anche in questo caso è necessaria qualche spiegazione

- \vec{v} velocità di P da O
- $\vec{v}_{O'}$ velocità di O' da O
- \vec{v}' velocità di P da O'
- $\vec{\omega}$ vettore rotazione di O' da O
- \vec{r}' posizione di P da O'

Teorema 10.3 — Accelerazione relativa

La dimostrazione in questo caso è molto caotica.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

Scomponiamo le operazioni e consideriamo come prima solo l'asse x, basta duplicare per gli altri assi.

$$\frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} = \vec{a}_{O'}$$

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{dv_{x'} \hat{U}_{x'} + \dots}{dt} = \frac{dv_{x'}}{dt} \hat{U}_{x'} + v_{x'} \frac{d\hat{U}_{x'}}{dt} + \dots = \vec{a}' + v_{x'} (\vec{\omega} \times \hat{U}_{x'}) + \dots = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' = \vec{\alpha} \times \vec{r}'$$

$$\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

Ricomponiamo tutti i pezzi della dimostrazione

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Piccola spiegazione

- \vec{a}' accelerazione di P da O'
- $\vec{a}_{O'}$ accelerazione di O' da O
- $\vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{\alpha} \times \vec{r}'$ Accelerazione di trascinamento
- $2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ Accelerazione di Coriolis



Definiti tutti questi nomi ricordo che nello studio di un moto in un sistema di riferimento non inerziale bisogna considerare \vec{F}_t e \vec{F}_c

Definizione 10.1 — sistema di riferimento inerziale

Un sistema di riferimento è inerziale se vale la 2' legge della dinamica:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Definito un primo sistema di riferimento inerziale se $\vec{a}_{O'} = 0$ e $\vec{\omega} = 0$ allora anche il secondo sistema di riferimento è inerziale poichè vale $\vec{a} = \vec{a}'$ quindi la prima legge della dinamica è vera.

11 Dinamica dei sistemi di punti materiali

Definizione 11.1 — Forze interne

Sono le forze che interagiscono tra punti materiali del sistema

Definizione 11.2 — Forze esterne

Solo le forze che interagiscono tra punti materiali del sistema e oggetti che ne sono al di fuori.

Dalle definizioni è chiaro che una forza possa solo essere interna o esterna, ne consegue che:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^E + \vec{F}_i^I$$

Teorema 11.1 — Forze interne

Per la 3' legge della dinamica sappiamo che

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

Ne consegue che:

$$\vec{F}^I = \sum \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BA} = 0$$

La somma di tutte le forze interne è 0

Definizione 11.3 — Centro di massa

$$\vec{R} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i$$

In generale il centro di massa si sposta

Dimostrazione 11.1 — velocità del centro di massa

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d \frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{v}_i = \frac{\vec{p}}{M}$$

**Dimostrazione 11.2 — accelerazione del centro di massa**

$$\vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{1}{M} \sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{a}_i = \frac{1}{M} \left(\sum \vec{F}_i^E + \sum \vec{F}_i^I \right) = \frac{\vec{F}^E}{M}$$

Teorema 11.2 — I equazione cardinale della dinamica dei sistemi

Abbiamo visto come

$$M\vec{A} = \vec{F}^E$$

Questo può essere riscritto come

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dM\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{F}^E$$

Nel caso di $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = 0$ si parla di sistema isolato. In altre parole la somma delle forze esterne sul sistema è nulla. Un sistema isolato si muove in moto rettilineo uniforme (se la sua massa non varia)

Teorema 11.3 — II equazione cardinale della dinamica dei sistemi

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)$$

Ora deriviamo il momento angolare rispetto al tempo per vedere come cambia il teorema definito.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \frac{d\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i}{dt} = \sum \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times (m_i \vec{v}_i) + \vec{r}_i \times \frac{dm_i \vec{v}_i}{dt} \right)$$

\vec{r}_i è il vettore posizione rispetto al centro di massa

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum (\vec{v}_i - \vec{v}_O) \times m_i \vec{v}_i + \sum \left(\vec{r}_i \times (\vec{F}_i^E + \vec{F}_i^I) \right)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i - \sum \vec{v}_O \times m_i \vec{v}_i + \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^E + \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^I = 0 - (\vec{v}_O \times \vec{\rho}) + \vec{M}^E + \vec{M}^I$$

Ora dimostriamo che \vec{M}^I è sempre uguale a 0.

$$\vec{M}^I = \vec{r}_A \times \vec{F}_{AB} + \vec{r}_B \times \vec{F}_{BA} = \vec{r}_A \times \vec{F}_{AB} - \vec{r}_B \times \vec{F}_{AB} = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}_{AB} = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}_{AB}$$

Questi 2 vettori sono paralleli quindi il prodotto vettoriale è 0.

$$\vec{M}^I = 0$$

Quindi risulta che:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\rho} \times \vec{v}_O + \vec{M}^E = M\vec{V}_{CM} \times \vec{V}_O + \vec{M}^E$$

- \vec{v}_{CM} la velocità del centro di massa
- \vec{v}_O la velocità del polo O
- \vec{M}^E momenti delle forze esterne

Ora scomponiamo il momento angolare e l'energia cinetica in un contributo "interno" ed uno del "CM".



Teorema 11.4 — I teorema di K  ning

Polo = origine sistema inerziale

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{r}_{CM}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}$$

$$\vec{L} = \sum (\vec{r}'_i + \vec{r}_{CM}) \times m_i (\vec{v}'_i + \vec{v}_{CM})$$

$$\vec{L} = \sum \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i + \sum \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_{CM} + \sum \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}'_i + \sum \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_{CM} = \vec{L}' + 0 + \vec{r}_{CM} \times M \vec{v}_{CM}$$

$$\sum m_i \vec{r}'_i = 0 \text{ Nel sistema di riferimento del CM il CM    nell'O}$$

$$\sum m_i \vec{v}'_i = \vec{\rho}' = 0 \text{ Nel sistema di riferimento del CM la somma delle velocit   del CM    0}$$

Riassumendolo e semplificando

$$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{L}_{CM}$$

- \vec{L}' momento angolare nel sistema di riferimento del CM
- \vec{L}_{CM} momento angolare del CM nel sistema di riferimento inerziale

Teorema 11.5 — II teorema di K  ning

Nel sistema di riferimento inerziale.

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{v}'_i + \vec{v}_{CM})^2 = \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \sum m_i \vec{v}'_i \cdot \vec{v}_{CM}$$

$$K = \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v_{CM}^2 = K' + K_{CM}$$

- K' energia cinetica "interna" rispetto al CM. 0 nel caso di corpo rigido
- K_{CM} energia cinetica dovuta alla velocit   del CM rispetto al sistema inerziale

12 Gli urti

Durante l'urto, la forza tra le due particelle    trascurabile rispetto alle forze esterne. Il tempo τ    trascurabile rispetto al "tempo di osservazione".

Facciamo degli esempi: una pallina da tennis che urta la racchetta ha un $\tau \simeq 0.01s$ e un tempo di osservazione di circa 1 secondo. 2 galassie urtano in milioni di anni, ma han un tempo di osservazione di centinaia di milioni.

Poich   durante l'urto le forze esterne son trascurabili rispetto alle forze interne possiamo affermare che:

$$\vec{F}^E = 0 \Rightarrow \vec{\rho} = const. \Rightarrow M \vec{v}_{CM} = const.$$

In altre parole, se la massa non varia, la velocit   del CM resta costante.



Dimostrazione 12.1 — Conservazione di ρ per le singole particelle

Per le singole particelle vale $\Delta\vec{\rho} = \vec{J}$, inoltre $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$.

$$\Delta\vec{\rho}_A = m_A\vec{v}_{Af} - m_A\vec{v}_{Ai} = \vec{J}_{BA} \simeq \tau\vec{F}_{BA} = -\tau\vec{F}_{AB}$$

$$\Delta\vec{\rho}_B = m_B\vec{v}_{Bf} - m_B\vec{v}_{Bi} = \vec{J}_{AB} \simeq \tau\vec{F}_{AB}$$

Ne consegue che

$$\Delta\rho_A = -\Delta\rho_B$$

12.1 Conservazione dell'energia in un urto

Abbiamo osservato come la quantità di moto si conservi, vale lo stesso per l'energia? Sappiamo che

$$\Delta E_M = \Delta K + \Delta U$$

Poiché durante un urto la posizione non varia sappiamo che non c'è variazione nell'energia potenziale $\Delta U = 0$.

Per il II teorema di Könning

$$K = K' + K_{CM}$$

L'ultimo termine è costante:

$$K_{CM} = \frac{1}{2} (m_A + m_B) v_{CM}^2$$

Invece

$$K' = \frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2$$

Chiameremo quindi:

- Urto elastico: un urto in cui interagiscono solo forze conservative $K' = \text{const.}$
- Urto anaelastico: urto in cui non si conserva l'energia cinetica $K_f < K_i$.

12.2 Urti nel sistema di riferimento

Ricordo che

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{CM}$$

Da questo è facile osservare come nel CM

$$\vec{\rho}' = \sum m_i \vec{v}_i' = 0$$

La quantità di moto nel CM risulta sempre essere 0. Questo non implica che ogni urto sia elastico, ma solo che per il CM tutti gli urti avvengono su una retta e che $\vec{\rho}'_A = -\vec{\rho}'_B$ è una relazione valida in qualunque istante.



12.3 Urti speciali

Dimostrazione 12.2 — Urto completamente anelastico

Un urto è completamente anelastico quando dopo l'urto i 2 corpi sono un unico punto di massa.

La quantità di moto.

$$m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B = (m_A + m_B) \vec{v}_f$$

$$\vec{v}_f = \frac{m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B}{m_A + m_B} = \vec{v}_{CM}$$

Per quel che riguarda l'energia cinetica prima e dopo l'urto

$$K = K' + K_{CM} = \frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2 + \frac{1}{2} (m_A + m_B) v_{CM}^2$$

Dopo l'urto

$$K = K' + K_{CM} = K_{CM} = \frac{1}{2} (m_A + m_B) v_{CM}^2$$

In un urto completamente anelastico la velocità relativa rispetto al CM delle particelle è nulla quindi scompare il termine K'

Dimostrazione 12.3 — Urto elastico monodimensionale

$$\vec{\rho}_f = \vec{\rho}_i, K_i = K_f$$

Nel caso monodimensionale queste 2 equazioni sono riscrivibili

$$m_A v_{Ai} + m_B v_{Bi} = m_A v_{Af} + m_B v_{Bf}$$

$$\frac{1}{2} m_A v_{Ai}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{Bi}^2 = \frac{1}{2} m_A v_{Af}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{Bi}^2$$

Ne risultano 2 equazioni di cui ne scriverò una sola, l'altra ho solo gli indici A e B scambiati.

$$v_{Af} = \frac{(m_A - m_B) v_{Ai} + 2 m_B v_{Bi}}{m_A + m_B}$$



Dimostrazione 12.4 — Urto anaelastico

Studieremo il tutto nel sistema del CM.

Poiché non tutta l'energia cinetica viene restituita definiamo il coefficiente di restituzione.

$$e = \frac{|\vec{\rho}_{Af}|}{|\vec{\rho}_{Ai}|} \leq 1$$

$$K_f = \frac{1}{2}m_A v_{Af}'^2 + \frac{1}{2}m_B v_{Bf}'^2 = e^2 \left(\frac{1}{2}m_A v_{Ai}'^2 + \frac{1}{2}m_B v_{Bi}'^2 \right)$$

La frazione di energia cinetica assorbita sarebbe

$$\frac{\Delta K'}{K_i'} = e^2 - 1$$

Nel sistema inerziale vale:

$$v_{Af} = \frac{(m_A - em_B) v_{Ai} + (1 + e) m_B v_{Bi}}{m_A + m_B}$$

Nel sistema del CM vale:

$$v_{Af}' = e v_{Ai}'$$



13 Corpo rigido



corpoRigidoGira.png

Definizione 13.1 — Corpo rigido

Sistema di punti materiali in cui per ogni coppia P_A e P_B vale $\vec{r}_{AB} = \text{const.}$. Questo ci permette di dire:

$$W = W^E + W^I = \Delta K$$

$W^I = 0$ Poichè non vi sono spostamenti interni. Consideriamo una distribuzione continua della materia fatta da elementi infinitesimi di volume (dV) e di massa (dm).

$$\rho = \frac{dm}{dV} \Rightarrow M = \int_V dm = \int_V \rho(\vec{r}) dV = \int_x \int_y \int_z \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Se $\rho = \text{const}$ si parla di corpo omogeneo per cui vale una comoda semplificazione $M = V\rho$.



Dimostrazione 13.1 — rotazione del corpo rigido

Rotazione intorno ad un asse fisso z no simmetrie.

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

Calcoliamo il momento angolare di P_i rispetto O .

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \Rightarrow |\vec{L}_i| = r_i m_i v_i = r_i m_i (\omega R_i)$$

Sull'asse z

$$L_{iz} = L_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = L_i \sin \theta_i = r_i m_i R_i \omega \sin \theta_i = R_i^2 m_i \omega$$

Se ora sommiamo tutte le componenti L sull'asse z

$$L_z = \sum L_{iz} = \sum R_i^2 m_i \omega = I_z \omega$$

Definizione 13.2 — momento d'inerzia

Il momento di inerzia rispetto un determinato asse z

$$I_z = \int_V R^2 dm \simeq \sum_i m_i R_i^2$$

Ci accorgiamo che

$$I_z = \int_V (x^2 + y^2) \rho dV$$

Poichè non vogliamo calcolare questo integrale troviamo delle belle tabelle per i momenti di inerzia. (Bersanelli 22-9)

Per ora abbiamo valutato solo quello che succede sull'asse z , ma

$$\vec{L} = \vec{L}_z + \vec{L}_\perp$$

\vec{L}_\perp Ruota con il corpo ed in generale $\neq 0$.

Se un corpo è simmetrico rispetto all'asse, vale che $\forall P_i \exists P_j$ t.c.

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i \Rightarrow \vec{L}_{i\perp} = -\vec{L}_{j\perp} \Rightarrow \vec{L}_\perp = 0$$

Sempre nel caso simmetrico vale:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{dI_z \vec{\omega}}{dt} = I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_z \vec{\alpha}$$



Teorema 13.1 — Huygens-Steiner

Dato il momento di inerzia rispetto a un asse passante per il CM vogliamo trovare il momento d'inerzia per un asse parallelo.

Coordinate del punto P_i nei 2 sistemi di riferimento

$$x_i = x'_i, y_i = y'_i + b, z_i = z'_i$$

$$\begin{aligned} I_{zi} = m_i (x_i^2 + y_i^2) &\Rightarrow I_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i x_i'^2 + \sum m_i (y_i'^2 + b)^2 = \\ &= \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2) + 2 \sum m_i y_i' b + \sum m_i b^2 = I_{CM} + Mb^2 \\ I_z &= I_{CM} + Mb^2 \end{aligned}$$

Dobbiamo fare un'osservazione importante sull'energia.

Dimostrazione 13.2 — energia cinetica rotazione

Se il corpo sta ruotando intorno al CM vale

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

Nel caso simmetrico valgono queste 2 formule $\vec{L}/\vec{\omega}$

$$K = \frac{1}{2} I_z \left(\frac{L}{I_z} \right)^2 = \frac{L^2}{2I_z}$$

$$dK = d \left(\frac{1}{2} I_z \omega^2 \right) = I_z \omega d\omega = I_z \frac{d\theta}{dt} \alpha dt = I_z \alpha d\theta = M d\theta = dW \Rightarrow P = \frac{dW}{dt} = M \frac{d\theta}{dt} = M\omega$$

Se il corpo ruota intorno ad un qualunque asse z vuol dire che il CM di massa si sta spostando quindi dobbiamo aggiungere la sua energia usando il teo Huygens-Steiner.

$$K = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2} (I_{CM} + Mb^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} Mb^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

14 Il pendolo fisico

Il pendolo fisico è un corpo rigido che viene imperneato in un punto. Non ci sono assunzioni sul corpo particolari, eccetto la realtà fisica che viene modellizzata.

$$I_z \alpha = I_z \frac{d^2 \theta}{dt^2} = M = -Mgh \sin \theta$$

Ci accorgiamo che per piccole oscillazioni per cui $\sin \theta = \theta$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{Mgh}{I_z} \theta = 0$$

Questa è l'equazione del moto armonico

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Mgh}{I_z}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_p} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{Mh} g}$$



Definizione 14.1 — Lunghezza ridotta

$$l_R = \frac{I_z}{Mh}$$

La lunghezza ridotta risulta utile nelle situazioni sperimentali:

$$I_z = I_{CM} + Mh^2 = Mh \left(\frac{I_{CM}}{Mh} + h \right) = Mh(h' + h)$$

$$l_R = h' + h$$

Ora consideriamo O' come centro dell'oscillazione

$$l'_R = \frac{I'_z}{Mh'} = \frac{I_{CM} + Mh'^2}{Mh'} = h + h' = l_R$$

l_R non è altro che una distanza tra 2 buchi per cui posso far ruotare il corpo rigido.

Poichè so che $l_R = l'_R \Rightarrow T_O = T_{O'}$ mi basta che un corpo abbia 2 punti per cui il periodo di oscillazione sia uguale e vale

$$l'_R = l_R = L \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2}{T^2} L$$

Così facendo possiamo misurare g con precisione elevata $\delta g/g \sim 10^{-6}$ come fece Kater con il suo pendolo reversibile 1817

15 Rotolamento

Un corpo rigido è in puro rotolamento quando il punto di contatto C è fermo e nel tempo infinitesimo dt il moto è una rotazione intorno a C con velocità angolare ω .

15.1 Forza costante orizzontale applicata all'asse passante CM

"Ruota imperneata ad un asse passante per il suo centro di un carretto tirato da dei cavalli"

$$\vec{F}_T = m\vec{a}_{CM} \Rightarrow \text{asse } x \quad F - f = ma$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{f} = I\vec{\alpha} \Rightarrow rf = I\frac{a}{r}$$

Ricaviamo ora f per poter risolvere il sistema e conoscere l'accelerazione del CM

$$f = \frac{I}{r^2} a$$

$$a = \frac{F}{m} \frac{1}{\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} = \frac{F}{m} \frac{1}{(1 + k)} \leq \frac{F}{m}$$

k lo usiamo per semplificare poiché dipende solo dalla forma del corpo.

Quello che è molto interessante è notare che rotolare riduce l'accelerazione rispetto a scivolare, che può risultare antintuitivo.

Ritorniamo a valutare la forza d'attrito ora che conosciamo l'accelerazione.

$$f = \frac{I^2 F}{r m (1 + k)} = F \frac{k}{1 + k}$$



Sappiamo che la forza di attrito statico è adattiva, ma sappiamo quale è il suo valore massimo

$$f \leq \mu_s N = \mu_s mg \Rightarrow F \leq \mu_s mg \frac{k+1}{k} = \mu_s mg \left(\frac{mr^2}{I} + 1 \right)$$

15.2 Momento costante applicato all'asse

"Ruota di un'automobile in accelerazione"

$$\vec{F}_T = m\vec{a}_{CM} \Rightarrow \text{asse } x \quad f = ma$$

$$\vec{M} = \vec{M}_o + \vec{r} \times \vec{f} = I\vec{\alpha} \Rightarrow M_o - rf = I\frac{a}{r}$$

Anche in questo caso risolviamo il sistema per identificare a .

$$f = \frac{1}{r} \left(M_o - I\frac{a}{r} \right)$$

Applicando la stessa procedura di prima.

$$a = \frac{M_o}{mr} \frac{1}{(1+k)}$$

Anche in questo caso identifichiamo il massimo momento applicabile

$$f \leq \mu_s N = \mu_s mg \Rightarrow M_o \leq \mu_s mgr (1+k)$$

15.3 Energia di un corpo in moto di puro rotolamento

$$a_{CM} = \frac{F_o}{m} \frac{1}{(1+k)} = \frac{M_o}{mr} \frac{1}{(1+k)}$$

$$\alpha = \frac{a_{CM}}{r}, \quad \omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$K = \frac{1}{2} I_C \omega^2 = \frac{1}{2} (kmr^2 + mr^2) \omega^2 = \frac{1}{2} mr^2 (k+1) \omega^2$$

15.4 Attrito volvente

Sperimentalmente ci accorgiamo che una biglia non rotola su ogni superficie piana, inoltre dopo un po' si ferma dopo averla lanciata.

$$M_v = h_v N = h_v mg \Rightarrow F_v = \frac{h_v mg}{r}$$

La forza motrice minima è dipendente dal raggio del corpo che ruota.

16 Precessione

Studiamo cosa succede se $\vec{L}_\perp \neq 0$. Sappiamo che la componente \vec{L}_\perp ruota intorno all'asse. Assumiamo $\vec{\omega} = \text{const.}$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i \vec{v}_i + \sum \vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum \vec{r}_i \times m_i \left(\frac{d\vec{\omega} \times \vec{r}_i}{dt} \right) =$$



$$= \sum \vec{r}_i \times m_i \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_i + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = \sum \vec{r}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{v}_i) = - \left(\sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \right) \times \vec{\omega} = \vec{\omega} \times \vec{L}$$

Semplifichiamo i conti

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{\omega} \times \vec{L} \Rightarrow d\vec{L} = \vec{M} dt$$

In modulo

$$dL = L_{\perp} d\phi \Rightarrow M = \frac{dL}{dt} = L_{\perp} \frac{d\phi}{dt} = L_{\perp} \omega$$

17 Forze centrali

Una forza centrale ha origine in un punto O, centro della forza.

In qualsiasi punto P dello spazio la forza è nella direzione OP.

Il modulo della forza P è funzione solo di r .

$$\vec{F} = \pm F(r) \hat{U}_r$$

17.1 Proprietà notevoli delle forze centrali

Teorema 17.1 — Momento angolare

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \pm \vec{r} \times F(r) \hat{U}_r = 0$$

Il vettore momento angolare si conserva.

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \Rightarrow \vec{L} \perp (\vec{r}, \vec{v})$$

Posizione e velocità si mantengono sullo stesso piano.

Teorema 17.2 — "Velocità areale" costante

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times m(\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = \vec{r} \times m\vec{v}_\theta$$

$$L = rmv_\theta = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = 2m \frac{dA}{dt}$$

$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$ L'area spazzata è un triangolo che ha per base r e altezza $rd\theta$

$$VA = \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

Teorema 17.3 — Lavoro di una forza centrale

$$\vec{F} = \pm F(r) \hat{U}_r$$

$$W = \int_A^B F(r) \hat{U}_r \cdot d\vec{s} = \int_A^B F(r) dr = f(\vec{r}_B) - f(\vec{r}_A)$$

Le forze centrali sono tutte conservative.



18 Le leggi di Keplero

Teorema 18.1 — I Keplero

Le orbite dei pianeti sono ellittiche

Teorema 18.2 — II Keplero

La velocità areale del raggio che unisce il Sole al pianeta è costante $\frac{dA}{dt} = \text{const.}$

Teorema 18.3 — III Keplero

Il quadrato del periodo di rivoluzione è proporzionale al cubo del semiasse maggiore

$$T^2 = k_S a^3$$

Questa costante k_S è legata al Sole.

18.1 Newton

Assumiamo un'orbita circolare e partiamo dalla II legge di Keplero.

$$\frac{dA}{dt} = \text{const.} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \text{const.}$$

Quindi si ha un moto circolare uniforme che genera una forza centripeta.

$$F = m\omega^2 r = m \frac{4\pi^2}{T^2} r = \frac{4\pi^2}{k_S} \frac{m}{r^2}$$

La forza è inversamente proporzionale al quadrato della distanza, ma ancora non sappiamo cosa sia k_S .

Se il Sole esercita una forza sulla Terra allora anche la Terra deve esercitare una forza sul Sole.

$$\begin{aligned} |\vec{F}_{ST}| &= |\vec{F}_{TS}| \Rightarrow \frac{4\pi^2}{k_S} \frac{m_T}{r^2} = \frac{4\pi^2}{k_S} \frac{m_S}{r^2} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{m_S k_S} = \frac{4\pi^2}{m_T k_T} = G \\ \vec{F} &= -G \frac{m_S m_T}{r^2} \hat{U}_r \end{aligned}$$

In questa formula compaiono 2 masse che sono agenti della forza gravitazionale, mentre per ora abbiamo sempre considerato la massa come resistente alla variazione di velocità.

$$G \frac{m_T^g m^g}{r^2} = m^i g \Rightarrow g = G \frac{m_T}{r^2}$$

Questa semplificazione è valida solo se $m^g = m^i$ la massa gravitazionale è uguale a quella inerziale. Sperimentalmente questa ugualianza vale fino ad una precisione di $10^{-12} m/s^2$

Definizione 18.1 — Campo Gravitazionale

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{U}_r = \left(-G \frac{m_1}{r^2} \hat{U}_r \right) m_2 = \vec{\eta} m_2$$

Il vettore $\vec{\eta}$ lo chiamiamo vettore campo gravitazionale, e m_2 massa campione.

Il Campo totale generato in P da n masse:

$$\vec{\eta}(P) = \sum_{i=1}^n \vec{\eta}_i(P) = -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i^2} \hat{U}_{r_i}$$



Teorema 18.4 — di Gauss

Chiamata S una superficie chiusa che racchiude la massa puntiforme m .

$$d\vec{S} = dS \hat{U}_n$$

Il vettore superficie infinitesima ha come modulo l'area della superficie infinitesima, per direzione la normale alla superficie e verso uscente.

Il flusso infinitesimale del campo $\vec{\eta}$:

$$d\Phi = \vec{\eta} \cdot d\vec{S}$$

Il flusso attraverso l'intera superficie S :

$$\Phi = \int_S \vec{\eta} \cdot d\vec{S} = - \int_S \eta \hat{U}_r \cdot d\vec{S} = - \int_S \frac{Gm}{r^2} dS \cos \theta = -Gm \int_S \frac{dS \cos \theta}{r^2} =$$

Riconosciamo che $dS \cos \theta$ è l'angolo solido che al massimo è 4π .

$$\Phi = -Gm \int_S \frac{dS_n}{r^2} = -Gm \int_S d\Omega = -4\pi Gm$$

m è una qualunque massa dentro la superficie.

Valutiamo il flusso totale del campo $\vec{\eta} = -\eta(r)\hat{U}_r$ attraverso la sfera S .

$$\Phi = \int_S \vec{\eta} \cdot d\vec{S} = - \int_S \eta(r) \hat{U}_r \cdot d\vec{S} = -\eta(r) \int_S dS = -4\pi r^2 \eta(r)$$

Ricordo che $\hat{U}_r / d\vec{S}$ per questo l'angolo compreso è 0.

Uguagliando con il teorema di Gauss.

$$\Phi = -4\pi r^2 \eta(r) = -4\pi Gm \Rightarrow \eta(r) = \frac{Gm}{r^2}$$

Dimostrazione 18.1 — Guscio sferico

Prendiamo un guscio sferico con distribuzione di massa simmetrica.

Valutiamo il campo di un qualunque punto P appartenente all'interno del guscio.

$$\eta_1 = -G \frac{dm_1}{r_1^2} = -G \frac{(\rho dS_1 dr)}{r_1^2} = -G \frac{\rho dr}{r_1^2} \pi (r_1 d\alpha)^2 = -G \rho dr \pi (d\alpha)^2 = -d\eta_2$$

Questa lunga uguaglianza ci dice che preso uno "spicchio" infinitesimale di guscio il suo campo viene annullato dallo "spicchio" opposto. Sappiamo quindi che il campo gravitazionale dentro un guscio sferico generato da se stesso è nullo.



Dimostrazione 18.2 — Campo gravitazionale interno ad una sfera omogenea

Immaginiamo un pianeta omogeneo. La massa contenuta nel raggio r è data da $m(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$.

$$\frac{m(r)}{M} = \frac{r^3}{R^3} \Rightarrow \Phi = -4\pi r^2 \eta(r) = -4\pi G m(r) = -4\pi G M \frac{r^3}{R^3}$$

Ricaviamo il campo.

$$\eta(r) = \frac{GM}{R^3} r = \frac{g}{R} r$$

Facciamo un piccolo giochino: immaginiamo un buco che attraversi un pianeta.

$$F = -\eta(r)m = -\frac{GM}{R^3} r m = -kr$$

In altre parole la forza gravitazionale si comporta come una molla centrata nel centro del pianeta, nel caso della terra partendo dalla superficie e risolvendo si ottiene $T \sim 5 \cdot 10^3 s \sim 84 \text{ min}$.

Dimostrazione 18.3 — Energia potenziale gravitazionale

Se il comportamento del corpo è del tutto simile alle leggi per una molla, che è una forza centrale sappiamo che $E = U + K = \text{const}$. Vogliamo ottenere una legge per l'energia potenziale.

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{U}_r \cdot d\vec{s} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} dr$$

Integriamo

$$W = -G m_1 m_2 \int_A^B \frac{1}{r^2} dr = -G m_1 m_2 \left(-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A} \right) = -\Delta E_P$$

Osserviamo che se un corpo ad una data distanza da un altro non viaggia abbastanza rapidamente resta legato ad esso. Per conservazione dell'energia diciamo a quale velocità deve viaggiare un corpo per far sì che si fermi solo all'infinito?

$$\frac{1}{2} m v_f^2 - G \frac{m_T m}{r_T} = 0 \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2Gm_T}{r_T}} = \sqrt{2gr_T} \simeq 11.2 \text{ Km/s}$$

Cosa succede al limite: $v_f \rightarrow c$ poichè niente si muove più veloce della luce stiamo ipotizzando un corpo che non fa scappare niente da se stesso.

$$\frac{1}{2} m c^2 - G \frac{M m}{r} = 0 \Rightarrow r_S = 2 \frac{GM}{c^2}$$

Questo si chiama raggio di Schwarzschild e un corpo così massivo Buco Nero.

18.2 Potere è volere

No dimostrazione

$$\vec{\eta} = -\nabla V = -\nabla \left(-G \frac{m_1}{r} \right)$$