

Onde

Jacopo Basso Ricci

March 21, 2026

Indice

1	Notazione	2
2	L'oscillatore armonico	2
2.1	Condizioni iniziali	4
2.2	Analisi Dimensionale e implicazioni	5
3	Energia	5
4	Oscillatore armonico smorzato	7
4.1	Condizioni iniziali	11



1 Notazione

In questo documento userò sempre la scrittura

$$\frac{dx}{dt} \text{ e } \frac{d^2x}{dt^2}$$

rispettivamente per derivate temporali di primo e secondo ordine.

2 L'oscillatore armonico

L'oscillatore è un modello idealizzato che noi studieremo per avere una base solida da cui partire.

Definizione 2.1 — Oscillatore Armonico

Immaginiamo di avere un piano orizzontale senza alcun attrito sulla quale posizioniamo una massa vincolata ad un punto fisso tramite una molla ideale.

NOTA: La molla è definita ideale in quanto non ha massa e rispetta perfettamente la legge di Hooke.

Definito questo modello di base iniziamone lo studio. Immaginiamo di spostare la massa dalla posizione di equilibrio della molla. In questa condizione, per ora statica, facciamo l'analisi delle forze.

$$\sum_i \vec{F}_i = m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}$$

Poichè il moto avviene soltanto lungo un asse, ha un solo grado di libertà, non è necessaria la notazione vettoriale.

$$F = -kx = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

L'equazione differenziale che abbiamo trovato, chiamata anche equazione del moto, ha come soluzione una famiglia di funzioni. In particolare questa è un'equazione differenziale lineare (compaiono solo x e le sue derivate), omogenea (a "destra" c'è 0), del secondo ordine (le derivate compaiono al massimo all'ordine 2).

Per semplificare la trattazione matematica:

Definizione 2.2 — Pulsazione

$$\omega_p^2 = \frac{k}{m}$$

In questo modo l'equazione differenziale diventa:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_p^2 x$$

Se noi guardiamo questa ODE ci rendiamo conto che dobbiamo trovare una funzione che differenziata 2 volte è la stessa funzione a meno di una costante. Ci ricordiamo che questa è una



caratteristica delle funzioni trigonometriche $\cos(x)$ e $\sin(x)$. Proviamo a vedere cosa succede sostituendo queste funzioni a x .

$$\begin{aligned}x(t) &= \cos(t) \\ \frac{dx}{dt} &= -\sin(t) \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\cos(t)\end{aligned}$$

Siamo sulla buona strada, ora dobbiamo introdurre ω_p .

$$\begin{aligned}x(t) &= \cos(\omega_p t) \\ \frac{dx}{dt} &= -\omega_p \sin(\omega_p t) \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega_p^2 \cos(\omega_p t) = -\omega_p^2 x(t)\end{aligned}$$

Abbiamo una soluzione valida, ma non è l'unica che ci viene in mente, come detto prima possiamo fare lo stesso giochetto anche con $\sin(x)$.

$$\begin{aligned}x(t) &= \sin(\omega_p t) \\ \frac{dx}{dt} &= \omega_p \cos(\omega_p t) \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega_p^2 \sin(\omega_p t) = -\omega_p^2 x(t)\end{aligned}$$

Abbiamo quindi 2 soluzioni particolari indipendenti (l'una non è il prodotto dell'altra). La soluzione generale dell'oscillatore armonico risulta essere la combinazione lineare delle 2 soluzioni particolari.

$$x(t) = A \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t)$$

Un altro modo per scrivere la stessa cosa è questo:

$$x(t) = R \cos(\omega_p t + \varphi)$$



Dimostrazione 2.1 — Trasformazione dell'equazione

Partiamo dalla soluzione:

$$A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

Vogliamo riscriverla come

$$R \cos(\omega t + \varphi).$$

Usiamo la formula di addizione:

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi$$

Dunque:

$$R \cos(\omega t + \varphi) = R \cos \varphi \cos(\omega t) - R \sin \varphi \sin(\omega t).$$

Uguagliando i coefficienti otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} A = R \cos \varphi, \\ B = -R \sin \varphi. \end{cases}$$

Da cui:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \tan \varphi = -\frac{B}{A}$$

Pertanto:

$$A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega t + \varphi)$$

2.1 Condizioni iniziali

Per ora abbiamo solo guardato ad una soluzione generale, come possiamo calarla in un caso specifico? Se osserviamo il nostro sistema ci viene in mente che noi possiamo farlo partire in 2 modi: spostando la massa dal punto di riposo della molla, dando una leggera velocità iniziale alla molla o con una combinazione di queste 2 situazioni. Partiamo dall'equazione generale:

$$x(t) = A \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t)$$

Poichè noi vogliamo definire questa equazione a partire dalle condizioni iniziali capiamo cosa succede in 0.

$$\begin{aligned} x(t)|_{t=0} &= x(0) = A \\ \frac{dx}{dt} &= -A\omega_p \sin(\omega_p t) + B\omega_p \cos(\omega_p t) \\ \frac{dx(0)}{dt} &= B\omega_p = v(0) \\ B &= \frac{v(0)}{\omega_p} \end{aligned}$$

In questo modo abbiamo fissato i valori di A, B in modo tale che siano definite a partire dai valori fisici del sistema. Con le formule ottenute prima possiamo anche muoverci tra le 2 soluzioni.



$$x(t) = R \cos(\omega_p t + \varphi)$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\tan \varphi = -\frac{B}{A}$$

2.2 Analisi Dimensionale e implicazioni

Tutto quello che abbiamo trovato fin ora deve avere unità di misura coerenti. Partiamo dall'analisi di ω_p .

$$[\omega_p] = \left[\sqrt{\frac{K}{m}} \right] = \sqrt{\frac{\text{N m}^{-1}}{\text{kg}}} = \sqrt{\frac{\text{kg s}^{-2}}{\text{kg}}} = \sqrt{\text{s}^{-2}} = \text{s}^{-1}$$

Noi sappiamo che i rad sono un'unità di misura che è in realtà adimensionale, ma per maggiore chiarezza preferiamo scrivere:

$$[\omega_p] = \text{rad s}^{-1}$$

Ragionando sulle caratteristiche delle funzioni trigonometriche risulta chiaro che questa ω_p è legata al periodo T . In particolare:

Definizione 2.3 — Periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega_p}$$

$$[T] = \frac{1}{\text{s}^{-1}} = \text{s}$$

Come si nota anche le unità di misura sono coerenti.

Esiste anche un'altra grandezza ricavata da ω_p , che è strettamente legata al periodo.

Definizione 2.4 — Frequenza

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow \omega_p = 2\pi f$$

$$[f] = \text{s}^{-1}$$

3 Energia

Facciamo lo studio dell'energia di un oscillatore armonico. Per condizioni di stabilità sappiamo che il potenziale U ha delle caratteristiche ben precise chiare in un'espansione di Taylor-McLaurin:



$$\begin{aligned}
 U(x) &= U(0) + \frac{dU(0)}{dx}x + \frac{1}{2} \frac{d^2U(0)}{dx^2}x^2 + \dots \\
 U(0) &= \text{const.} \\
 \frac{dU(0)}{dx} &= 0 \\
 \frac{d^2U(0)}{dx^2} &> 0
 \end{aligned}$$

Ciò è intuitivo se pensiamo che per avere un oscillatore bisogna essere in una buca di potenziale. Matematicamente significa che sono in un minimo e che la funzione lì ha concavità verso l'alto. Il valore del potenziale in sé è arbitrario in quanto io posso settare lo 0 ovunque voglia.

Cerchiamo ora di capirci qualcosa in più.

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

Il potenziale nella nostra molla sappiamo essere:

$$U(x) = \frac{1}{2}Kx^2$$

Ne consegue che la forza sia:

$$F = -\frac{1}{2}2Kx = -Kx$$

Studiamo l'energia meccanica totale e chiamiamo il paramentro α per parlare di un caso generale dove la forza abbia la stessa forma:

$$\begin{aligned}
 E_m &= K + U \\
 K &= \frac{1}{2}m\frac{dx}{dt} \\
 U &= \frac{1}{2}\alpha x^2
 \end{aligned}$$

Cosa capiamo dall'equazione del moto?

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_p^2 x &= 0 \\
 \omega_p &= \sqrt{\frac{\alpha}{m}}
 \end{aligned}$$

Riportiamo l'equazione del moto distribuendo la massa

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x = 0$$



Noi sappiamo, dall'analisi dimensionale qualcosa di molto interessante.

$$[F * x] = \text{N m} = \text{J}$$

$$[F * \frac{dx}{dt}] = \text{N m s}^{-1} = \text{W}$$

Moltiplichiamo l'equazione del moto per $\frac{dx}{dt}$.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} + \alpha x \frac{dx}{dt} = 0$$

Questo tipo di equazione lo troviamo quando deriviamo un quadrato, infatti:

$$\frac{df^2(t)}{dt} = 2f(t) * \frac{df(t)}{dt}$$

Sostituendo questo risultato dentro l'equazione del moto abbiamo:

$$m \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \alpha \frac{1}{2} \frac{dx^2}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \alpha x^2 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \alpha x^2 = \text{const.}$$

$$K + U = \text{const.}$$

Abbiamo ritrovato dall'equazione del moto la conservazione dell'energia meccanica. Possiamo quindi provare a vedere cosa risulta inserendo la soluzione dell'equazione.

$$x(t) = A \cos(\omega_p t + \varphi)$$

$$\frac{dx}{dt} = -A \omega_p \sin(\omega_p t + \varphi)$$

Sostituendo

$$E_m = \frac{m}{2} A^2 \omega_p^2 \sin^2(\omega_p t + \varphi) + \frac{\alpha}{2} A^2 \cos^2(\omega_p t + \varphi)$$

$$\text{Ricordando } \omega_p = \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$$

$$E_m = \frac{\alpha}{2} A^2 (\sin^2(\omega_p t + \varphi) + \cos^2(\omega_p t + \varphi))$$

$$E_m = \frac{\alpha}{2} A^2$$

Anche in questo caso si nota come E_m è una costante.

Un'altra osservazione molto interessante giunge dallo studio di x e $\frac{dx}{dt}$ in quanto queste 2 funzioni sono sfasate di $\frac{\pi}{2}$, si dice che sono in quadratura di fase.

4 Oscillatore armonico smorzato

Per ora il sistema che abbiamo osservato non disperde energia, questo è fisicamente impossibile in quanto è un moto perpetuo. Vogliamo quindi un'equazione del moto che ci permetta di osservare una perdita di energia. Introduciamo quindi una nuova forza: l'attrito viscoso.



Definizione 4.1 — Attrito viscoso

$$\vec{F} = -m2\gamma \frac{d\vec{x}}{dt}$$

Il 2 servirà a semplificare la trattazione, non è strettamente necessario.

Otteniamo quindi una nuova equazione del moto.

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= -2\gamma m \frac{dx}{dt} - \alpha x \\ \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \frac{\alpha}{m} x &= 0 \\ \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_p^2 x &= 0 \end{aligned}$$

Questa è un'equazione differenziale ordinaria di secondo grado. Per questa equazione è però necessario applicare un metodo più sistematico e meno intuitivo, ma già sappiamo che basterà una combinazione lineare di 2 soluzioni specifiche.

Dimostrazione 4.1 — Soluzione dell'oscillatore armonico smorzato

Cerchiamo le soluzioni della forma:

$$x(t) = e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{C}$$

Le derivate sono quindi:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda e^{\lambda t} \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \lambda^2 e^{\lambda t} \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale posso direttamente raccogliere $e^{\lambda t}$.

$$e^{\lambda t}[\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_p^2] = 0$$

Poiché noi vogliamo fare in modo che questa equazione risulti 0 sappiamo che:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_p^2 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_p^2} \\ x_1 &= e^{\lambda_1 t} \\ x_2 &= e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

Sappiamo già che la soluzione generale si avrà facendo una combinazione lineare:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Valutiamo il segno di $\lambda_{1,2}$, separando i vari casi e tenendo a mente che questi esponenziali non possono esplodere a ∞ perché questo implicherebbe una generazione di energia dal nulla.



Dimostrazione 4.2 — Oscillatore armonico smorzato: SOVRASMORZATO

$$\Delta > 0 \Rightarrow \gamma^2 > \omega_p^2$$

Osserviamo cosa succede agli esponenziali.

$$\lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\Delta} \Rightarrow \lambda_2 < 0$$

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\Delta} \Rightarrow -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_p^2} < 0 \Rightarrow \lambda_1 < 0$$

Abbiamo quindi una combinazione lineare valida:

$$x(t) = C_1 e^{-|\lambda_1|t} + C_2 e^{-|\lambda_2|t}$$

Scritta in questo modo si nota perfettamente che sono 2 esponenziali che tendono a 0 senza aver compiuto un'oscillazione vera e propria. Questo sistema si chiama: SOVRASMORZATO.

Dimostrazione 4.3 — Oscillatore armonico smorzato: SMORZAMENTO CRITICO

Passiamo alla seconda possibilità:

$$\Delta = 0$$

Questo ci crea non pochi problemi perché ora abbiamo una sola equazione e non 2 soluzioni particolari.

$$\lambda = -\gamma \Rightarrow x_1(t) = e^{-\gamma t}$$

Per trovare una nuova soluzione possiamo aggiungere un polinomio a questa soluzione. Così facendo otteniamo:

$$x_2(t) = t e^{-\gamma t}$$

La nostra combinazione lineare è quindi:

$$x(t) = e^{-\gamma t} (C_1 + C_2 t)$$

Questo sistema viene chiamato SMORZAMENTO CRITICO. Questo è quello che si vuole ottenere in sistemi meccanici reali come i pistoni di una macchina.



Dimostrazione 4.4 — Oscillatore armonico smorzato: SOTTOSMORZATO

Ora abbiamo l'ultimo caso:

$$\Delta < 0$$

Come sappiamo le soluzioni sono complesse coniugate:

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= -\gamma \pm i\sqrt{\omega_p^2 - \gamma^2} \\ x_1(t) &= e^{-\gamma t} * e^{i\omega t} \\ x_2(t) &= e^{-\gamma t} * e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

In queste formulazioni compare:

Definizione 4.2 — Omega

$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 - \gamma^2}$$

Noi sappiamo dalle formule di Eulero:

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$$

Di conseguenza:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= e^{-\gamma t} \cos \omega t + i e^{-\gamma t} \sin \omega t \\ x_2(t) &= e^{-\gamma t} \cos \omega t - i e^{-\gamma t} \sin \omega t\end{aligned}$$

Ci accorgiamo che queste 2 soluzioni indipendenti sono comunque una combinazione lineare di soluzioni più semplici da scrivere, per non dover portare in giro tutta quella roba riscriviamo:

$$\begin{aligned}\hat{x}_1(t) &= e^{-\gamma t} \cos \omega t \\ \hat{x}_2(t) &= e^{-\gamma t} \sin \omega t\end{aligned}$$

La soluzione totale è quindi:

$$x(t) = e^{-\gamma t} [C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t]$$

Come prima è possibile riscrivere questa soluzione come:

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

In questo caso l'oscillatore è detto SOTTOSMORZATO o DEBOLMENTE SMORZATO



Dimostrazione 4.5 — Trasformazione dell'equazione

Partiamo dall'espressione

$$x(t) = e^{-\gamma t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)].$$

Vogliamo riscriverla nella forma

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi).$$

Utilizziamo l'identità trigonometrica

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos \varphi \cos(\omega t) - \sin \varphi \sin(\omega t).$$

Pertanto

$$A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos \varphi \cos(\omega t) - A \sin \varphi \sin(\omega t).$$

Confrontando con l'espressione iniziale otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} C_1 = A \cos \varphi, \\ C_2 = -A \sin \varphi. \end{cases}$$

Elevando al quadrato e sommando:

$$C_1^2 + C_2^2 = A^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = A^2,$$

da cui

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}.$$

Per la fase:

$$\tan \varphi = -\frac{C_2}{C_1}.$$

Quindi la soluzione può essere riscritta come

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi),$$

dove

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \varphi = \arctan\left(-\frac{C_2}{C_1}\right).$$

4.1 Condizioni iniziali

Come fatto per l'oscillatore armonico semplice vogliamo trovare un legame tra le condizioni iniziali e i parametri dell'equazione.

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

Come prima valutiamo sia la posizione che la velocità in 0.

$$align * x(0) = A \cos \varphi$$

$$\frac{dx}{dt} = -\gamma Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi) - \omega Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = -\gamma A \cos \varphi + -\omega A \sin \varphi$$



Si nota subito che questa non è una soluzione lineare, ma possiamo fare alcune semplificazioni del nostro sistema:

$$\begin{cases} x(0) = A \cos \varphi \\ v(0) = -\gamma x(0) - \omega A \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(0) = A \cos \varphi \\ -v(0) - \gamma x(0) = \omega A \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2(0) = A^2 \cos^2 \varphi \\ \left(\frac{v(0) + \gamma x(0)}{\omega} \right)^2 = A^2 \sin^2 \varphi \end{cases}$$

Ora sommandole otteniamo:

$$A^2 = x^2(0) + \left(\frac{v(0) + \gamma x(0)}{\omega} \right)^2$$

Mentre il rapporto fatto prima di quadrarle ci restituisce:

$$\tan \varphi = -\frac{v(0) + \gamma x(0)}{\omega} * \frac{1}{x(0)}$$