

Onde

Jacopo Basso Ricci

March 27, 2026

Indice

1	Notazione	2
2	L'oscillatore armonico	2
2.1	Condizioni iniziali	4
2.2	Analisi Dimensionale e implicazioni	5
3	Energia Oscillatore Armonico	5
4	Oscillatore armonico smorzato	7
4.1	Condizioni iniziali	11
5	Energia Oscillatore Armonico Smorzato	12
5.1	Prima approssimazione	12
5.2	Seconda approssimazione	13
6	Oscillatore armonico forzato	13
6.1	Condizioni Iniziali	15
6.2	Casi particolari	16
7	Energia oscillatore armonico forzato	17
8	Sistemi a più gradi di libertà	18
9	Battimenti	19



1 Notazione

In questo documento userò sempre la scrittura

$$\frac{dx}{dt} \text{ e } \frac{d^2x}{dt^2}$$

rispettivamente per derivate temporali di primo e secondo ordine.

2 L'oscillatore armonico

L'oscillatore è un modello idealizzato che noi studieremo per avere una base solida da cui partire.

Definizione 2.1 — Oscillatore Armonico

Immaginiamo di avere un piano orizzontale senza alcun attrito sulla quale posizioniamo una massa vincolata ad un punto fisso tramite una molla ideale.

NOTA: La molla è definita ideale in quanto non ha massa e rispetta la legge di Hooke.

Definito questo modello di base iniziamone lo studio. Immaginiamo di spostare la massa dalla posizione di equilibrio della molla. In questa condizione, per ora statica, facciamo l'analisi delle forze.

$$\sum_i \vec{F}_i = m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}$$

Poichè il moto avviene soltanto lungo un asse, ha un solo grado di libertà, non è necessaria la notazione vettoriale.

$$F = -kx = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

L'equazione differenziale che abbiamo trovato, chiamata anche equazione del moto, ha come soluzione una famiglia di funzioni. In particolare questa è un'equazione differenziale lineare (compaiono solo x e le sue derivate), omogenea (a "destra" c'è 0), del secondo ordine (le derivate compaiono al massimo all'ordine 2).

Per semplificare la trattazione matematica:

Definizione 2.2 — Pulsazione

$$\omega_p^2 = \frac{k}{m}$$

In questo modo l'equazione differenziale diventa:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_p^2 x$$

Se noi guardiamo questa ODE ci rendiamo conto che dobbiamo trovare una funzione che differenziata 2 volte è la stessa funzione a meno di una costante. Ci ricordiamo che questa è una caratteristica delle funzioni trigonometriche $\cos(x)$ e $\sin(x)$. Proviamo a vedere cosa succede sostituendo queste funzioni a x .



$$\begin{aligned}x(t) &= \cos(t) \\ \frac{dx}{dt} &= -\sin(t) \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\cos(t)\end{aligned}$$

Siamo sulla buona strada, ora dobbiamo introdurre ω_p .

$$\begin{aligned}x(t) &= \cos(\omega_p t) \\ \frac{dx}{dt} &= -\omega_p \sin(\omega_p t) \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega_p^2 \cos(\omega_p t) = -\omega_p^2 x(t)\end{aligned}$$

Abbiamo una soluzione valida, ma non è l'unica che ci viene in mente, come detto prima possiamo fare lo stesso giochetto anche con $\sin(x)$.

$$\begin{aligned}x(t) &= \sin(\omega_p t) \\ \frac{dx}{dt} &= \omega_p \cos(\omega_p t) \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega_p^2 \sin(\omega_p t) = -\omega_p^2 x(t)\end{aligned}$$

Abbiamo quindi 2 soluzioni particolari indipendenti (l'una non è il prodotto dell'altra). La soluzione generale dell'oscillatore armonico risulta essere la combinazione lineare delle 2 soluzioni particolari.

$$x(t) = A \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t)$$

Un altro modo per scrivere la stessa cosa è questo:

$$x(t) = R \cos(\omega_p t + \varphi)$$



Dimostrazione 2.1 — Trasformazione dell'equazione

Partiamo dalla soluzione:

$$A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

Vogliamo riscriverla come

$$R \cos(\omega t + \varphi).$$

Usiamo la formula di addizione:

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi$$

Dunque:

$$R \cos(\omega t + \varphi) = R \cos \varphi \cos(\omega t) - R \sin \varphi \sin(\omega t).$$

Uguagliando i coefficienti otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} A = R \cos \varphi, \\ B = -R \sin \varphi. \end{cases}$$

Da cui:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \tan \varphi = -\frac{B}{A}$$

Pertanto:

$$A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega t + \varphi)$$

2.1 Condizioni iniziali

Per ora abbiamo solo guardato ad una soluzione generale, come possiamo calarla in un caso specifico? Se osserviamo il nostro sistema ci viene in mente che noi possiamo farlo partire in 2 modi: spostando la massa dal punto di riposo della molla, dando una leggera velocità iniziale alla molla o con una combinazione di queste 2 situazioni. Partiamo dall'equazione generale:

$$x(t) = A \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t)$$

Poichè noi vogliamo definire questa equazione a partire dalle condizioni iniziali capiamo cosa succede in 0.

$$\begin{aligned} x(t)|_{t=0} &= x(0) = A \\ \frac{dx}{dt} &= -A\omega_p \sin(\omega_p t) + B\omega_p \cos(\omega_p t) \\ \frac{dx(0)}{dt} &= B\omega_p = v(0) \\ B &= \frac{v(0)}{\omega_p} \end{aligned}$$

In questo modo abbiamo fissato i valori di A, B in modo tale che siano definite a partire dai valori fisici del sistema. Con le formule ottenute prima possiamo anche muoverci tra le 2 soluzioni.



$$x(t) = R \cos(\omega_p t + \varphi)$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\tan \varphi = -\frac{B}{A}$$

2.2 Analisi Dimensionale e implicazioni

Tutto quello che abbiamo trovato fin ora deve avere unità di misura coerenti. Partiamo dall'analisi di ω_p .

$$[\omega_p] = \left[\sqrt{\frac{K}{m}} \right] = \sqrt{\frac{\text{N m}^{-1}}{\text{kg}}} = \sqrt{\frac{\text{kg s}^{-2}}{\text{kg}}} = \sqrt{\text{s}^{-2}} = \text{s}^{-1}$$

Noi sappiamo che i rad sono un'unità di misura che è in realtà adimensionale, ma per maggiore chiarezza preferiamo scrivere:

$$[\omega_p] = \text{rad s}^{-1}$$

Ragionando sulle caratteristiche delle funzioni trigonometriche risulta chiaro che questa ω_p è legata al periodo T . In particolare:

Definizione 2.3 — Periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega_p}$$

$$[T] = \frac{1}{\text{s}^{-1}} = \text{s}$$

Come si nota anche le unità di misura sono coerenti.

Esiste anche un'altra grandezza ricavata da ω_p , che è strettamente legata al periodo.

Definizione 2.4 — Frequenza

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow \omega_p = 2\pi f$$

$$[f] = \text{s}^{-1}$$

3 Energia Oscillatore Armonico

Facciamo lo studio dell'energia di un oscillatore armonico. Per condizioni di stabilità sappiamo che il potenziale U ha delle caratteristiche ben precise in un'espansione di Taylor-McLaurin:



$$\begin{aligned}
 U(x) &= U(0) + \frac{dU(0)}{dx}x + \frac{1}{2} \frac{d^2U(0)}{dx^2}x^2 + \dots \\
 U(0) &= \text{const.} \\
 \frac{dU(0)}{dx} &= 0 \\
 \frac{d^2U(0)}{dx^2} &> 0
 \end{aligned}$$

Ciò è intuitivo se pensiamo che per avere un oscillatore bisogna essere in una buca di potenziale. Matematicamente significa che sono in un minimo e che la funzione lì ha concavità verso l'alto. Il valore del potenziale in se è arbitrario in quanto io posso settare lo 0 ovunque voglia.

Cerchiamo ora di capirci qualcosa in più.

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

Il potenziale nella nostra molla sappiamo essere:

$$U(x) = \frac{1}{2}Kx^2$$

Ne consegue che la forza sia:

$$F = -\frac{1}{2}2Kx = -Kx$$

Studiamo l'energia meccanica totale e chiamiamo il paramentro α per parlare di un caso generale dove la forza abbia la stessa forma:

$$\begin{aligned}
 E_m &= K + U \\
 K &= \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \\
 U &= \frac{1}{2}\alpha x^2
 \end{aligned}$$

Cosa capiamo dall'equazione del moto?

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_p^2 x &= 0 \\
 \omega_p &= \sqrt{\frac{\alpha}{m}}
 \end{aligned}$$

Riportiamo l'equazione del moto distribuendo la massa

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x = 0$$



Noi sappiamo, dall'analisi dimensionale qualcosa di molto interessante.

$$[F * x] = \text{N m} = \text{J}$$

$$[F * \frac{dx}{dt}] = \text{N m s}^{-1} = \text{W}$$

Moltiplichiamo l'equazione del moto per $\frac{dx}{dt}$.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} + \alpha x \frac{dx}{dt} = 0$$

Questo tipo di equazione lo troviamo quando deriviamo un quadrato, infatti:

$$\frac{df^2(t)}{dt} = 2f(t) * \frac{df(t)}{dt}$$

Sostituendo questo risultato dentro l'equazione del moto abbiamo:

$$m \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \alpha \frac{1}{2} \frac{dx^2}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \alpha x^2 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \alpha x^2 = \text{const.}$$

$$K + U = \text{const.}$$

Abbiamo ritrovato dall'equazione del moto la conservazione dell'energia meccanica. Possiamo quindi provare a vedere cosa risulta inserendo la soluzione dell'equazione.

$$x(t) = A \cos(\omega_p t + \varphi)$$

$$\frac{dx}{dt} = -A \omega_p \sin(\omega_p t + \varphi)$$

Sostituendo

$$E_m = \frac{m}{2} A^2 \omega_p^2 \sin^2(\omega_p t + \varphi) + \frac{\alpha}{2} A^2 \cos^2(\omega_p t + \varphi)$$

$$\text{Ricordando } \omega_p = \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$$

$$E_m = \frac{\alpha}{2} A^2 (\sin^2(\omega_p t + \varphi) + \cos^2(\omega_p t + \varphi))$$

$$E_m = \frac{\alpha}{2} A^2$$

Anche in questo caso si nota come E_m è una costante.

Un'altra osservazione molto interessante giunge dallo studio di x e $\frac{dx}{dt}$ in quanto queste 2 funzioni sono sfasate di $\frac{\pi}{2}$, si dice che sono in quadratura di fase.

4 Oscillatore armonico smorzato

Per ora il sistema che abbiamo osservato non disperde energia, questo è fisicamente impossibile in quanto è un moto perpetuo. Vogliamo quindi un'equazione del moto che ci permetta di osservare una perdita di energia. Introduciamo quindi una nuova forza: l'attrito viscoso.

**Definizione 4.1 — Attrito viscoso**

$$\vec{F} = -m2\gamma \frac{d\vec{x}}{dt}$$

Il 2 servirà a semplificare la trattazione, non è strettamente necessario.

Otteniamo quindi una nuova equazione del moto.

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= -2\gamma m \frac{dx}{dt} - \alpha x \\ \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \frac{\alpha}{m} x &= 0 \\ \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_p^2 x &= 0 \end{aligned}$$

Questa è un'equazione differenziale ordinaria di secondo grado. Per questa equazione è però necessario applicare un metodo più sistematico e meno intuitivo, ma già sappiamo che basterà una combinazione lineare di 2 soluzioni specifiche.

Dimostrazione 4.1 — Soluzione dell'oscillatore armonico smorzato

Cerchiamo le soluzioni della forma:

$$x(t) = e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{C}$$

Le derivate sono quindi:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda e^{\lambda t} \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \lambda^2 e^{\lambda t} \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale posso direttamente raccogliere $e^{\lambda t}$.

$$e^{\lambda t} [\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_p^2] = 0$$

Poichè noi vogliamo fare in modo che questa equazione risulti 0 sappiamo che:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_p^2 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_p^2} \\ x_1 &= e^{\lambda_1 t} \\ x_2 &= e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

Sappiamo già che la soluzione generale si avrà facendo una combinazione lineare:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Valutiamo il segno di $\lambda_{1,2}$, separando i vari casi e tenendo a mente che questi esponenziali non possono esplodere a ∞ perché questo implicherebbe una generazione di energia dal nulla.



Dimostrazione 4.2 — Oscillatore armonico smorzato: SOVRASMORZATO

$$\Delta > 0 \Rightarrow \gamma^2 > \omega_p^2$$

Osserviamo cosa succede agli esponenziali.

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= -\gamma - \sqrt{\Delta} \Rightarrow \lambda_2 < 0 \\ \lambda_1 &= -\gamma + \sqrt{\Delta} \Rightarrow -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_p^2} < 0 \Rightarrow \lambda_1 < 0\end{aligned}$$

Abbiamo quindi una combinazione lineare valida:

$$x(t) = C_1 e^{-|\lambda_1|t} + C_2 e^{-|\lambda_2|t}$$

Scritta in questo modo si nota perfettamente che sono 2 esponenziali che tendono a 0 senza aver compiuto un'oscillazione vera e propria. Questo sistema si chiama: SOVRASMORZATO.

Dimostrazione 4.3 — Oscillatore armonico smorzato: SMORZAMENTO CRITICO

Passiamo alla seconda possibilità:

$$\Delta = 0$$

Questo ci crea non pochi problemi perché ora abbiamo una sola equazione e non 2 soluzioni particolari.

$$\lambda = -\gamma \Rightarrow x_1(t) = e^{-\gamma t}$$

Per trovare una nuova soluzione possiamo aggiungere un polinomio a questa soluzione. Così facendo otteniamo:

$$x_2(t) = t e^{-\gamma t}$$

La nostra combinazione lineare è quindi:

$$x(t) = e^{-\gamma t} (C_1 + C_2 t)$$

Questo sistema viene chiamato SMORZAMENTO CRITICO. Questo è quello che si vuole ottenere in sistemi meccanici reali come i pistoni di una macchina.



Dimostrazione 4.4 — Oscillatore armonico smorzato: SOTTOSMORZATO

Ora abbiamo l'ultimo caso:

$$\Delta < 0$$

Come sappiamo le soluzioni sono complesse coniugate:

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= -\gamma \pm i\sqrt{\omega_p^2 - \gamma^2} \\ x_1(t) &= e^{-\gamma t} * e^{i\omega t} \\ x_2(t) &= e^{-\gamma t} * e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

In queste formulazioni compare:

Definizione 4.2 — Omega

$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 - \gamma^2}$$

Noi sappiamo dalle formule di Eulero:

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$$

Di conseguenza:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= e^{-\gamma t} \cos \omega t + i e^{-\gamma t} \sin \omega t \\ x_2(t) &= e^{-\gamma t} \cos \omega t - i e^{-\gamma t} \sin \omega t\end{aligned}$$

Ci accorgiamo che queste 2 soluzioni indipendenti sono comunque una combinazione lineare di soluzioni più semplici da scrivere, per non dover portare in giro tutta quella roba riscriviamo:

$$\begin{aligned}\hat{x}_1(t) &= e^{-\gamma t} \cos \omega t \\ \hat{x}_2(t) &= e^{-\gamma t} \sin \omega t\end{aligned}$$

La soluzione totale è quindi:

$$x(t) = e^{-\gamma t} [C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t]$$

Come prima è possibile riscrivere questa soluzione come:

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

In questo caso l'oscillatore è detto SOTTOSMORZATO o DEBOLMENTE SMORZATO



Dimostrazione 4.5 — Trasformazione dell'equazione

Partiamo dall'espressione

$$x(t) = e^{-\gamma t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)].$$

Vogliamo riscriverla nella forma

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi).$$

Utilizziamo l'identità trigonometrica

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos \varphi \cos(\omega t) - \sin \varphi \sin(\omega t).$$

Pertanto

$$A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos \varphi \cos(\omega t) - A \sin \varphi \sin(\omega t).$$

Confrontando con l'espressione iniziale otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} C_1 = A \cos \varphi, \\ C_2 = -A \sin \varphi. \end{cases}$$

Elevando al quadrato e sommando:

$$C_1^2 + C_2^2 = A^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = A^2,$$

da cui

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}.$$

Per la fase:

$$\tan \varphi = -\frac{C_2}{C_1}.$$

Quindi la soluzione può essere riscritta come

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi),$$

dove

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \varphi = \arctan\left(-\frac{C_2}{C_1}\right).$$

4.1 Condizioni iniziali

Come fatto per l'oscillatore armonico semplice vogliamo trovare un legame tra le condizioni iniziali e i parametri dell'equazione.

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

Come prima valutiamo sia la posizione che la velocità in 0.

$$align * x(0) = A \cos \varphi$$

$$\frac{dx}{dt} = -\gamma Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi) - \omega Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = -\gamma A \cos \varphi + -\omega A \sin \varphi$$



Si nota subito che questa non è una soluzione lineare, ma possiamo fare alcune semplificazioni del nostro sistema:

$$\begin{cases} x(0) = A \cos \varphi \\ v(0) = -\gamma x(0) - \omega A \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(0) = A \cos \varphi \\ -v(0) - \gamma x(0) = \omega A \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2(0) = A^2 \cos^2 \varphi \\ \left(\frac{v(0) + \gamma x(0)}{\omega} \right)^2 = A^2 \sin^2 \varphi \end{cases}$$

Ora sommandole otteniamo:

$$A^2 = x^2(0) + \left(\frac{v(0) + \gamma x(0)}{\omega} \right)^2$$

Mentre il rapporto fatto prima di quadrarle ci restituisce:

$$\tan \varphi = -\frac{v(0) + \gamma x(0)}{\omega} * \frac{1}{x(0)}$$

5 Energia Oscillatore Armonico Smorzato

Riscriviamo l'equazione:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$E_m = K + U = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}\alpha x^2$$

$$\frac{dx}{dt} = -A\gamma e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi) - A\omega e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi)$$

A questo punto abbiamo tutto quello che ci serve per ricavare E.

$$K = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2}mA^2e^{-2\gamma t}[\gamma \cos(\omega t + \varphi) - \omega \sin(\omega t + \varphi)]^2$$

5.1 Prima approssimazione

La formula è molto pesante da portare in giro e per semplificarla dobbiamo fare delle approssimazioni. Accettiamo che $\gamma \ll \omega$, questo ha senso perché stiamo studiando il caso più interessante: quando il moto prosegue per un po' e non tutta l'energia viene completamente fermato.

Con questa ipotesi vale: $\gamma \cos(\dots) \ll \omega \sin(\dots)$.

$$K \simeq \frac{1}{2}mA^2e^{-2\gamma t}\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

Nell'energia, e non nella fase (in quanto l'errore si accumulerebbe ciclo per ciclo), possiamo approssimare ancora e osservare che se $\gamma \ll \omega \Rightarrow \omega \simeq \omega_p = \frac{\alpha}{m}$.

$$K = \frac{1}{2}\alpha A^2 e^{-2\gamma t} \sin^2(\omega t + \varphi)$$



Torniamo all'energia meccanica totale.

$$E_m = K + U = \frac{1}{2}\alpha A^2 e^{-2\gamma t} \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}\alpha A^2 e^{-2\gamma t} \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}\alpha A^2 e^{-2\gamma t}$$

$$E_m = \frac{1}{2}\alpha A^2 e^{-2\gamma t} = \frac{1}{2}m\omega_p^2 A^2 e^{-2\gamma t}$$

In questa approssimazione l'energia meccanica decade come un esponenziale con costante $-2\gamma t$. Ovviamente questo vale in determinate approssimazioni, infatti non ha senso che l'energia durante un ciclo si perda sempre allo stesso modo, questo perché tanto più si muove rapidamente il grave tanto più fa attrito.

5.2 Seconda approssimazione

Poiché abbiamo preso l'andamento oscillatorio dell'energia meccanica vogliamo un'approssimazione migliore e più precisa. Ripartiamo dall'energia:

$$E_m = K + U = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}\alpha x^2$$

Cerchiamo di capire come varia:

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2}2m \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{2}2\alpha \frac{dx}{dt} x = \frac{dx}{dt} \left(m \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x \right)$$

Se torniamo all'equazione del moto ci accorgiamo che:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha x - 2\gamma m \frac{dx}{dt}$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x = -2\gamma m \frac{dx}{dt}$$

Sostituendo alla nostra equazione:

$$E_m = -2\gamma m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

Possiamo dimostrare che tutte le perdite sono legate alla forza di attrito viscoso. Intuitivamente è l'unica forza non conservativa e quindi è l'unica che può disperdere energia. Dimostriamolo:

$$dW = F_v dx \Rightarrow P_{visc} = \frac{dW}{dt} = F_v * \frac{dx}{dt} = -2\gamma m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

Scriviamo la formula in modo chiaro:

$$\frac{dE_m}{dt} = -2\gamma m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = -2\gamma m A^2 \omega_p^2 e^{-2\gamma t} \sin^2(\omega t + \varphi)$$

6 Oscillatore armonico forzato

L'oscillatore smorzato è destinato a fermarsi, immaginiamo di dare energia al sistema. Introduciamo quindi una forzate:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_p^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_F t$$



Oscillatore forzato con forzante periodica o armonica.

Anche in questo caso bisogna identificare una soluzione e la teoria delle equazioni differenziali ci dice che si ottiene sommando la soluzione generale per l'equazione differenziale omogenea associata e una soluzione particolare dell'equazione completa.

Nel nostro caso noi già abbiamo la soluzione generale dell'omogenea associata:

$$x_0(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Perciò la soluzione generale sarà:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0) + x_p(t)$$

Come troviamo $x_p(t)$? Sicuramente ha una forma ben specifica:

$$x_p(t) = B \cos(\omega_f t + \varphi)$$

Quali valori di B e φ , se esistono, devo sostituire?

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0) + B \cos(\omega_f t + \varphi)$$

Questa è molto interessante perché per $t \gg \tau = \frac{1}{\gamma}$, superata la fase transiente, $x(t) = x_p(t)$. In altre parole quando il sistema va a regime la componente che decade come un esponenziale è 0. Tutto quello che resta è soltanto l'onda data dalla forzante.

Dimostrazione 6.1 — Dimostrazione della soluzione, parte 1

Introduciamo una funzione complessa $z(t)$ tale che $x(t) = \Re[z(t)]$. Poiché $\cos \alpha = \Re(e^{i\alpha})$, l'equazione reale equivale alla parte reale di

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2\gamma \frac{dz}{dt} + \omega_p^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_f t}.$$

Consideriamo prima l'equazione omogenea:

$$\frac{d^2 z_h}{dt^2} + 2\gamma \frac{dz_h}{dt} + \omega_p^2 z_h = 0.$$

La soluzione caratteristica è $z_h(t) = Ce^{(-\gamma + i\omega)t}$, dove $\omega = \sqrt{\omega_p^2 - \gamma^2}$. Scrivendo $C = Ae^{i\varphi_0}$, otteniamo

$$z_h(t) = Ae^{-\gamma t} e^{i(\omega t + \varphi_0)}.$$

Prendendo la parte reale:

$$x_h(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0),$$

che è il primo termine richiesto.



Dimostrazione 6.2 — Dimostrazione della soluzione, parte 2

Cerchiamo ora una soluzione particolare nella forma $z_p(t) = Ke^{i\omega_f t}$. Calcoliamo le derivate:

$$\frac{dz_p}{dt} = i\omega_f Ke^{i\omega_f t}, \quad \frac{d^2 z_p}{dt^2} = -\omega_f^2 Ke^{i\omega_f t}$$

Sostituendo nell'equazione complessa:

$$(-\omega_f^2 K + 2i\gamma\omega_f K + \omega_p^2 K)e^{i\omega_f t} = \frac{F_0}{m}e^{i\omega_f t}$$

Dividendo per $e^{i\omega_f t}$:

$$K(\omega_p^2 - \omega_f^2 + 2i\gamma\omega_f) = \frac{F_0}{m}$$

Da cui:

$$K = \frac{F_0/m}{\omega_p^2 - \omega_f^2 + 2i\gamma\omega_f}$$

Scriviamo $K = Be^{i\varphi}$. Allora:

$$z_p(t) = Be^{i(\omega_f t + \varphi)}$$

Prendendone la parte reale:

$$x_p(t) = B \cos(\omega_f t + \varphi)$$

che coincide con il secondo termine della soluzione proposta.

La soluzione complessiva è:

$$z(t) = Ae^{(-\gamma + i\omega)t}e^{i\varphi_0} + Be^{i(\omega_f t + \varphi)}$$

Prendendo la parte reale si ottiene finalmente:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0) + B \cos(\omega_f t + \varphi)$$

che soddisfa l'equazione originale. CVD.

6.1 Condizioni Iniziali

Sfruttiamo i risultati della dimostrazione. Poniamo ora $D = \omega_p^2 - \omega_f^2 + 2i\gamma\omega_f$

Il modulo del denominatore è

$$|D| = \sqrt{(\omega_p^2 - \omega_f^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2}$$

Quindi il modulo di K è

$$B = |K| = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_p^2 - \omega_f^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2}}$$

Scriviamo ora $K = Be^{i\varphi}$, proprio come nella dimostrazione. Per determinare l'angolo φ osserviamo che K è il reciproco (a meno di un fattore reale positivo F_0/m) del numero complesso

$$D = a + ib \quad \text{con} \quad a = \omega_p^2 - \omega_f^2, \quad b = 2\gamma\omega_f$$

Il motivo per cui compare il reciproco risulta dalla soluzione particolare: si impone la forma $z_p(t) = Ke^{i\omega_f t}$, la si inserisce nell'equazione differenziale e i termini derivati producono un



fattore complesso moltiplicativo che è proprio D . Per soddisfare l'equazione, questo fattore deve essere compensato dividendo per esso, dunque K è proporzionale a $1/D$. In altre parole, il numero complesso D “pesa” la risposta del sistema, e K deve contenerne il reciproco per annullarlo.

Il numero $D = a + ib$ può essere rappresentato come vettore nel piano complesso con una certa lunghezza $|D|$ e un certo angolo θ . Questo angolo soddisfa:

$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

perché il rapporto tra parte immaginaria e parte reale è la tangente dell'angolo del vettore.

Dunque possiamo scrivere

$$D = |D| e^{i\theta}$$

Il reciproco ha la forma

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{|D|} e^{-i\theta}$$

Qui si vede immediatamente che il reciproco inverte l'angolo del numero complesso. Otteniamo quindi

$$\varphi = -\theta = -\arctan\left(\frac{2\gamma\omega_f}{\omega_p^2 - \omega_f^2}\right)$$

6.2 Casi particolari

Compresa la natura delle condizioni iniziali possiamo fare una minima discussione di quello che succede per semplici limiti notevoli.

Caso $\gamma \sim 0$

Quando lo smorzamento è molto piccolo, il termine transitorio decade molto lentamente e il sistema si comporta come un oscillatore quasi conservativo. In particolare, nel coefficiente di risposta stazionaria

$$B = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_p^2 - \omega_f^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2}}$$

il termine $2\gamma\omega_f$ al denominatore diventa trascurabile tranne che in prossimità della risonanza. Ne segue che, lontano dalla risonanza, la risposta del sistema è molto piccola, mentre in prossimità di $\omega_f \sim \omega_p$ il denominatore tende a valori molto bassi e l'ampiezza cresce sensibilmente. Nel limite $\gamma \rightarrow 0$ la risonanza tende a diventare infinitamente “stretta” e il sistema oscilla con ampiezza molto grande quando la frequenza di forzamento coincide con quella naturale.

Caso $\omega_f \sim \omega_p$

Quando la frequenza di forzamento si avvicina alla frequenza naturale, il termine

$$(\omega_p^2 - \omega_f^2)^2$$

nel denominatore della risposta si riduce drasticamente. Il valore di B diventa quindi dominato dal termine di smorzamento

$$(2\gamma\omega_f)^2$$

e ciò porta a un picco di ampiezza attorno alla risonanza. Per γ piccolo, questo picco è particolarmente accentuato e la curva della risposta assume la tipica forma risonante molto appuntita. In sintesi, per $\omega_f \sim \omega_p$ la risposta del sistema è grande e dominata quasi completamente dal regime forzato, mentre il transitorio diventa trascurabile dopo tempi brevi.



Comportamento di φ per $\omega_f \sim \omega_p$

La fase si ottiene da

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{2\gamma\omega_f}{\omega_p^2 - \omega_f^2}\right)$$

Quando ω_f si avvicina a ω_p , il termine $\omega_p^2 - \omega_f^2$ tende a zero e il rapporto nella tangente diventa molto grande. Ciò implica che l'angolo tende a

$$\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

poiché la tangente cresce senza limite e l'arctangente tende a $\pm\pi/2$ a seconda del segno. Nel caso tipico con $\gamma > 0$ e ω_f crescente verso ω_p , l'argomento è positivo e dunque la fase risulta negativa e vicina a $-\pi/2$.

Fisicamente questo significa che, in prossimità della risonanza, l'oscillazione imposta dal forzamento è in ritardo di un quarto di periodo rispetto alla forza esterna, comportamento caratteristico degli oscillatori debolmente smorzati. Si dice che oscillazione e forzamento sono in quadratura di fase.

7 Energia oscillatore armonico forzato

Per situazioni $\tau \gg \frac{1}{\gamma}$ vale la soluzione:

$$x(t) = B \cos(\omega t + \varphi)$$

Come sempre sappiamo:

$$E_m = K + U \quad K = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \quad U = \frac{1}{2}\alpha x^2$$

Facciamo la derivata della soluzione:

$$\frac{dx}{dt} = -B\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

Sostituendo otteniamo:

$$K = \frac{1}{2}mB^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad U = \frac{1}{2}\alpha B^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

Ricordiamo che $\omega_p^2 = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow \alpha = \omega_p^2 m$. La soluzione risulta quindi:

$$E_m = K + U = \frac{1}{2}mB^2 (\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \omega_p^2 \cos^2(\omega t + \varphi))$$

Questa formula sembra del tutto simile alla soluzione che avevamo trovato per il moto armonico semplice, ma i 2 termini non si compensano esattamente. Ciò è ragionevole in quanto l'energia cinetica è data dal moto forzato, mentre l'energia elastica segue il moto della molla. Infatti se la forzante fosse in risonanza ($\omega = \omega_p$):

$$E_m = \frac{1}{2}m\omega_p^2 B^2$$

Ritroviamo un oscillatore armonico semplice. In questo modo stiamo dando l'energia istantaneamente quando viene persa con la forzante.



Torniamo al caso generale:

$$\begin{aligned}
 E_m &= K + U = \frac{1}{2}mB^2 (\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \omega_p^2 \cos^2(\omega t + \varphi)) \\
 E_m &= \frac{1}{2}mB^2 \{\omega^2 [1 - \cos^2(\omega t + \varphi)] + \omega_p^2 \cos^2(\omega t + \varphi)\} \\
 E_m &= \frac{1}{2}mB^2 \{\omega^2 + (\omega_p^2 - \omega^2) \cos^2(\omega t + \varphi)\}
 \end{aligned}$$

L'equazione dell'energia non decade ma oscilla tra 2 valori d'energia. L'oscillatore è quindi un moto perpetuo, ma questo non va contro le leggi della fisica poiché al sistema viene continuamente data energia.

8 Sistemi a più gradi di libertà

Partiamo da un modello molto semplice: 2 pendoli legati da una molla. I 2 pendoli sarebbero totalmente indipendenti se non fosse per la molla. Facciamo un po' di nomenclatura:

- m : massa delle molle
- K : costante elastica della molla
- x_1 : spostamento della massa 1 dall'equilibrio
- x_2 : spostamento della massa 2 dall'equilibrio
- l : lunghezza del pendolo

Possiamo scrivere:

$$F_1 = -\frac{mg}{l}x_1 - K(x_1 - x_2) \quad F_2 = -\frac{mg}{l}x_2 - K(x_2 - x_1)$$

Scriviamo le equazioni del moto per le 2 masse:

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{mg}{l}x_1 - K(x_1 - x_2) \quad m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{mg}{l}x_2 - K(x_2 - x_1)$$

Sommiamo e sottraiamo le 2 equazioni:

$$\begin{aligned}
 m \left(\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{d^2 x_2}{dt^2} \right) &= -\frac{mg}{l}(x_1 + x_2) \\
 m \left(\frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{d^2 x_2}{dt^2} \right) &= -\frac{mg}{l}(x_1 - x_2) - 2K(x_1 - x_2)
 \end{aligned}$$

A questo punto definisco $u_a = x_1 + x_2$ e $u_b = x_1 - x_2$. Otteniamo 2 equazioni:

$$\begin{aligned}
 m \frac{d^2 u_a}{dt^2} &= -\frac{mg}{l}u_a \\
 m \frac{d^2 u_b}{dt^2} &= -\frac{mg}{l}u_b - 2Ku_b
 \end{aligned}$$

Queste sono equazioni sono indipendenti e sappiamo come risolverle.

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 u_a}{dt^2} + \frac{g}{l}u_a &= 0 & \frac{d^2 u_a}{dt^2} + \omega_a^2 u_a &= 0 \\
 \frac{d^2 u_b}{dt^2} + \left(\frac{g}{l} + 2\frac{K}{m} \right) u_b &= 0 & \frac{d^2 u_b}{dt^2} + \omega_b^2 u_b &= 0
 \end{aligned}$$



Le soluzioni sono quindi:

$$u_a = A_a \cos(\omega_a t + \varphi_a) \quad u_b = A_b \cos(\omega_b t + \varphi_b)$$

Ora noi dobbiamo tornare indietro a x_1, x_2 .

$$x_1(t) = \frac{u_a + u_b}{2}$$

$$x_2(t) = \frac{u_a - u_b}{2}$$

Abbiamo completato lo studio del sistema. Se osserviamo i moti dei pendoli questi sono la sovrapposizione di 2 moti semplici. Nel modo u_a le 2 masse si muovono insieme e la molla non fa nulla, mentre nel modo u_b i pendoli si contraggono e si aprono in modo simmetrico. Il nostro moto complesso diventa facile da studiare se pensato come la sovrapposizione di 2 moti disinti e indipendenti. Questi sono chiamati MODI NORMALI, nel caso specifico informalmente sono chiamati modo a pendolo e modo a respiro.

9 Battimenti

Pendiamo l'esempio precedente e caliamoci nel caso specifico dove il pendolo parte da fermo con le seguenti posizioni iniziali:

$$x_1(0) = -2A \quad x_2(0) = 0$$

Se noi vogliamo studiare quello che stà succedendo dobbiamo scomporre la nostra condizione iniziale nei 2 modi semplici. Facciamo una prova ragionata: prendendo il modo a pendolo e mettendolo a $-A$ avremmo che

$$x_1(0) = -A \quad x_2(0) = -A$$

A questo punto introduciamo un modo a respiro che sia "allargato" di una A . Il nostro modo a respiro avrebbe condizione iniziale:

$$x_1(0) = -A \quad x_2(0) = +A$$

La somma dei 2 modi all'istante iniziale da la condizione iniziale:

$$x_1(0) = -2A \quad x_2(0) = 0$$

Abbiamo quindi scomposto il caso iniziale nei suoi 2 modi normali.

$$\omega_a = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \omega_b = \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}}$$

Se osserviamo il moto della massa 1 x_1 ci accorgiamo che è la somma di 2 oscillazioni simili ma non uguali. L'effetto prodotto è quello di un'oscillazione che ogni tanto interferisce in modo costruttivo ed ogni tanto in modo distruttivo. Questo fenomeno si chiamano BATTIMENTI.

$$x_1(t) = C_a \cos(\omega_a t + \varphi_a) + C_b \cos(\omega_b t + \varphi_b)$$

Nel caso specifico: $\varphi_a = \varphi_b = 0$, $C_a = C_b$:

$$x_1(t) = A[\cos(\omega_a t) + \cos(\omega_b t)]$$



Usiamo le formule di Prostaferesi:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad \alpha = \omega_a t \quad \beta = \omega_b t$$

Definiamo 2 variabili con nomi che sembrano casuali, ma diventeranno chiari:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\omega_a + \omega_b}{2} t = \omega_M t \quad \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\omega_a - \omega_b}{2} t = \omega_{inv} t$$

Ne risulta che:

$$x_1(t) = 2 \cos(\omega_M t) \cos(\omega_{inv} t)$$

Risulta chiaro che $\omega_{inv} \ll \omega_M$. Se noi grafichiamo questo andamento ci accorgeremmo che ω_{inv} rappresenta l'involuppo della curva, mentre ω_M le oscillazioni più piccole che avvengono nel "range" definito dall'involuppo.