

Onde

Jacopo Basso Ricci

March 29, 2026

Indice

1	Notazione	3
2	L'oscillatore armonico	3
2.1	Condizioni iniziali	5
2.2	Analisi Dimensionale e implicazioni	6
3	Energia Oscillatore Armonico	6
4	Oscillatore armonico smorzato	8
4.1	Condizioni iniziali	12
5	Energia Oscillatore Armonico Smorzato	13
5.1	Prima approssimazione	13
5.2	Seconda approssimazione	14
6	Oscillatore armonico forzato	14
6.1	Condizioni Iniziali	16
6.2	Casi particolari	17
7	Energia oscillatore armonico forzato	18
8	Sistemi a più gradi di libertà	19
9	Battimenti	20
10	Due masse collegate da tre molle	21
10.1	Forze sulle masse	21
10.2	Combinazioni simmetrica e antisimmetrica	22
10.3	Interpretazione fisica dei modi	22
10.4	Generalizzazione e limite continuo	22
11	Derivazione continua dell'equazione d'onda	23
11.1	Ipotesi fisiche fondamentali	23
11.2	Passaggio alla descrizione spaziale continua	24
11.3	Espansione di Taylor per a piccolo	24
11.4	Introduzione della densità lineare	25
11.5	Significato fisico	25
12	Struttura dell'equazione d'onda	25
12.1	Significato delle derivate parziali	26
12.2	Proprietà dell'equazione	26
12.3	Interpretazione fisica: il ruolo della curvatura	26



12.4	Analisi dimensionale	27
12.5	Spazio e tempo non sono indipendenti nella soluzione	27
12.6	Condizioni iniziali e condizioni al contorno	27
12.7	La costante v come legame con i modi normali	28
13	La velocità di propagazione e il legame con i modi normali	28
13.1	Dalla catena discreta al continuo: interpretazione unitaria	28
13.2	Trama fisica dell'equazione d'onda	29
13.3	La natura propagativa delle soluzioni	29
13.4	Il ruolo delle condizioni iniziali e delle condizioni al contorno	29
13.5	Verso la ricerca dei modi normali per la corda	30
13.6	Condizioni iniziali e completezza dei modi normali	30
13.7	Significato fisico delle componenti spaziale e temporale	30
13.8	Condizioni iniziali per la corda continua	31
13.9	Ruolo dei modi normali nella ricostruzione della soluzione	31
13.10	Interpretazione finale	32
14	Onde progressive e significato fisico della velocità v	32
15	Soluzione generale dell'equazione d'onda e metodo di d'Alembert	33
15.1	Metodo di d'Alembert	34
15.2	Proprietà delle soluzioni	35
15.3	Onde armoniche	35
15.4	Interpretazione geometrica	35
16	Potenza e trasporto di energia nelle onde	36
17	Dissipazione radiativa e oscillatore accoppiato alla corda	37
18	Onde acustiche nei fluidi	39
19	Onde acustiche: densità, pressione e spostamento	41
20	Relazione pressione-densità e chiusura dell'equazione acustica	43
21	Equazioni d'onda per pressione e densità	44



1 Notazione

In questo documento userò sempre la scrittura

$$\frac{dx}{dt} \text{ e } \frac{d^2x}{dt^2}$$

rispettivamente per derivate temporali di primo e secondo ordine.

2 L'oscillatore armonico

L'oscillatore è un modello idealizzato che noi studieremo per avere una base solida da cui partire.

Definizione 2.1 — Oscillatore Armonico

Immaginiamo di avere un piano orizzontale senza alcun attrito sulla quale posizioniamo una massa vincolata ad un punto fisso tramite una molla ideale.

NOTA: La molla è definita ideale in quanto non ha massa e rispetta la legge di Hooke.

Definito questo modello di base iniziamone lo studio. Immaginiamo di spostare la massa dalla posizione di equilibrio della molla. In questa condizione, per ora statica, facciamo l'analisi delle forze.

$$\sum_i \vec{F}_i = m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}$$

Poiché il moto avviene soltanto lungo un asse, ha un solo grado di libertà, non è necessaria la notazione vettoriale.

$$F = -kx = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

L'equazione differenziale che abbiamo trovato, chiamata anche equazione del moto, ha come soluzione una famiglia di funzioni. In particolare questa è un'equazione differenziale lineare (compaiono solo x e le sue derivate), omogenea (a "destra" c'è 0), del secondo ordine (le derivate compaiono al massimo all'ordine 2).

Per semplificare la trattazione matematica:

Definizione 2.2 — Pulsazione

$$\omega_p^2 = \frac{k}{m}$$

In questo modo l'equazione differenziale diventa:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_p^2 x$$

Se noi guardiamo questa ODE ci rendiamo conto che dobbiamo trovare una funzione che differenziata 2 volte è la stessa funzione a meno di una costante. Ci ricordiamo che questa è una caratteristica delle funzioni trigonometriche $\cos(x)$ e $\sin(x)$. Proviamo a vedere cosa succede sostituendo queste funzioni a x .



$$\begin{aligned}x(t) &= \cos(t) \\ \frac{dx}{dt} &= -\sin(t) \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\cos(t)\end{aligned}$$

Siamo sulla buona strada, ora dobbiamo introdurre ω_p .

$$\begin{aligned}x(t) &= \cos(\omega_p t) \\ \frac{dx}{dt} &= -\omega_p \sin(\omega_p t) \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega_p^2 \cos(\omega_p t) = -\omega_p^2 x(t)\end{aligned}$$

Abbiamo una soluzione valida, ma non è l'unica che ci viene in mente, come detto prima possiamo fare lo stesso giochetto anche con $\sin(x)$.

$$\begin{aligned}x(t) &= \sin(\omega_p t) \\ \frac{dx}{dt} &= \omega_p \cos(\omega_p t) \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega_p^2 \sin(\omega_p t) = -\omega_p^2 x(t)\end{aligned}$$

Abbiamo quindi 2 soluzioni particolari indipendenti (l'una non è il prodotto dell'altra). La soluzione generale dell'oscillatore armonico risulta essere la combinazione lineare delle 2 soluzioni particolari.

$$x(t) = A \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t)$$

Un altro modo per scrivere la stessa cosa è questo:

$$x(t) = R \cos(\omega_p t + \varphi)$$



Dimostrazione 2.1 — Trasformazione dell'equazione

Partiamo dalla soluzione:

$$A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

Vogliamo riscriverla come

$$R \cos(\omega t + \varphi).$$

Usiamo la formula di addizione:

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi$$

Dunque:

$$R \cos(\omega t + \varphi) = R \cos \varphi \cos(\omega t) - R \sin \varphi \sin(\omega t).$$

Uguagliando i coefficienti otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} A = R \cos \varphi, \\ B = -R \sin \varphi. \end{cases}$$

Da cui:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \tan \varphi = -\frac{B}{A}$$

Pertanto:

$$A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega t + \varphi)$$

2.1 Condizioni iniziali

Per ora abbiamo solo guardato ad una soluzione generale, come possiamo calarla in un caso specifico? Se osserviamo il nostro sistema ci viene in mente che noi possiamo farlo partire in 2 modi: spostando la massa dal punto di riposo della molla, dando una leggera velocità iniziale alla molla o con una combinazione di queste 2 situazioni. Partiamo dall'equazione generale:

$$x(t) = A \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t)$$

Poiché noi vogliamo definire questa equazione a partire dalle condizioni iniziali capiamo cosa succede in 0.

$$\begin{aligned} x(t)|_{t=0} &= x(0) = A \\ \frac{dx}{dt} &= -A\omega_p \sin(\omega_p t) + B\omega_p \cos(\omega_p t) \\ \frac{dx(0)}{dt} &= B\omega_p = v(0) \\ B &= \frac{v(0)}{\omega_p} \end{aligned}$$

In questo modo abbiamo fissato i valori di A, B in modo tale che siano definite a partire dai valori fisici del sistema. Con le formule ottenute prima possiamo anche muoverci tra le 2 soluzioni.



$$x(t) = R \cos(\omega_p t + \varphi)$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\tan \varphi = -\frac{B}{A}$$

2.2 Analisi Dimensionale e implicazioni

Tutto quello che abbiamo trovato fin ora deve avere unità di misura coerenti. Partiamo dall'analisi di ω_p .

$$[\omega_p] = \left[\sqrt{\frac{K}{m}} \right] = \sqrt{\frac{\text{N m}^{-1}}{\text{kg}}} = \sqrt{\frac{\text{kg s}^{-2}}{\text{kg}}} = \sqrt{\text{s}^{-2}} = \text{s}^{-1}$$

Noi sappiamo che i rad sono un'unità di misura che è in realtà adimensionale, ma per maggiore chiarezza preferiamo scrivere:

$$[\omega_p] = \text{rad s}^{-1}$$

Ragionando sulle caratteristiche delle funzioni trigonometriche risulta chiaro che questa ω_p è legata al periodo T . In particolare:

Definizione 2.3 — Periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega_p}$$

$$[T] = \frac{1}{\text{s}^{-1}} = \text{s}$$

Come si nota anche le unità di misura sono coerenti.

Esiste anche un'altra grandezza ricavata da ω_p , che è strettamente legata al periodo.

Definizione 2.4 — Frequenza

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow \omega_p = 2\pi f$$

$$[f] = \text{s}^{-1}$$

3 Energia Oscillatore Armonico

Facciamo lo studio dell'energia di un oscillatore armonico. Per condizioni di stabilità sappiamo che il potenziale U ha delle caratteristiche ben precise in un'espansione di Taylor-McLaurin:



$$\begin{aligned}
 U(x) &= U(0) + \frac{dU(0)}{dx}x + \frac{1}{2} \frac{d^2U(0)}{dx^2}x^2 + \dots \\
 U(0) &= \text{const.} \\
 \frac{dU(0)}{dx} &= 0 \\
 \frac{d^2U(0)}{dx^2} &> 0
 \end{aligned}$$

Ciò è intuitivo se pensiamo che per avere un oscillatore bisogna essere in una buca di potenziale. Matematicamente significa che sono in un minimo e che la funzione lì ha concavità verso l'alto. Il valore del potenziale in se è arbitrario in quanto io posso settare lo 0 ovunque voglia.

Cerchiamo ora di capirci qualcosa in più.

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

Il potenziale nella nostra molla sappiamo essere:

$$U(x) = \frac{1}{2}Kx^2$$

Ne consegue che la forza sia:

$$F = -\frac{1}{2}2Kx = -Kx$$

Studiamo l'energia meccanica totale e chiamiamo il parametro α per parlare di un caso generale dove la forza abbia la stessa forma:

$$\begin{aligned}
 E_m &= K + U \\
 K &= \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \\
 U &= \frac{1}{2}\alpha x^2
 \end{aligned}$$

Cosa capiamo dall'equazione del moto?

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_p^2 x &= 0 \\
 \omega_p &= \sqrt{\frac{\alpha}{m}}
 \end{aligned}$$

Riportiamo l'equazione del moto distribuendo la massa

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x = 0$$



Noi sappiamo, dall'analisi dimensionale qualcosa di molto interessante.

$$[F * x] = \text{N m} = \text{J}$$

$$[F * \frac{dx}{dt}] = \text{N m s}^{-1} = \text{W}$$

Moltiplichiamo l'equazione del moto per $\frac{dx}{dt}$.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} + \alpha x \frac{dx}{dt} = 0$$

Questo tipo di equazione lo troviamo quando deriviamo un quadrato, infatti:

$$\frac{df^2(t)}{dt} = 2f(t) * \frac{df(t)}{dt}$$

Sostituendo questo risultato dentro l'equazione del moto abbiamo:

$$m \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \alpha \frac{1}{2} \frac{dx^2}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \alpha x^2 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \alpha x^2 = \text{const.}$$

$$K + U = \text{const.}$$

Abbiamo ritrovato dall'equazione del moto la conservazione dell'energia meccanica. Possiamo quindi provare a vedere cosa risulta inserendo la soluzione dell'equazione.

$$x(t) = A \cos(\omega_p t + \varphi)$$

$$\frac{dx}{dt} = -A \omega_p \sin(\omega_p t + \varphi)$$

Sostituendo

$$E_m = \frac{m}{2} A^2 \omega_p^2 \sin^2(\omega_p t + \varphi) + \frac{\alpha}{2} A^2 \cos^2(\omega_p t + \varphi)$$

$$\text{Ricordando } \omega_p = \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$$

$$E_m = \frac{\alpha}{2} A^2 (\sin^2(\omega_p t + \varphi) + \cos^2(\omega_p t + \varphi))$$

$$E_m = \frac{\alpha}{2} A^2$$

Anche in questo caso si nota come E_m è una costante.

Un'altra osservazione molto interessante giunge dallo studio di x e $\frac{dx}{dt}$ in quanto queste 2 funzioni sono sfasate di $\frac{\pi}{2}$, si dice che sono in quadratura di fase.

4 Oscillatore armonico smorzato

Per ora il sistema che abbiamo osservato non disperde energia, questo è fisicamente impossibile in quanto è un moto perpetuo. Vogliamo quindi un'equazione del moto che ci permetta di osservare una perdita di energia. Introduciamo quindi una nuova forza: l'attrito viscoso.



Definizione 4.1 — Attrito viscoso

$$\vec{F} = -m2\gamma \frac{d\vec{x}}{dt}$$

Il 2 servirà a semplificare la trattazione, non è strettamente necessario.

Otteniamo quindi una nuova equazione del moto.

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= -2\gamma m \frac{dx}{dt} - \alpha x \\ \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \frac{\alpha}{m} x &= 0 \\ \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_p^2 x &= 0 \end{aligned}$$

Questa è un'equazione differenziale ordinaria di secondo grado. Per questa equazione è però necessario applicare un metodo più sistematico e meno intuitivo, ma già sappiamo che basterà una combinazione lineare di 2 soluzioni specifiche.

Dimostrazione 4.1 — Soluzione dell'oscillatore armonico smorzato

Cerchiamo le soluzioni della forma:

$$x(t) = e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{C}$$

Le derivate sono quindi:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda e^{\lambda t} \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \lambda^2 e^{\lambda t} \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale posso direttamente raccogliere $e^{\lambda t}$.

$$e^{\lambda t}[\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_p^2] = 0$$

Poiché noi vogliamo fare in modo che questa equazione risulti 0 sappiamo che:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_p^2 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_p^2} \\ x_1 &= e^{\lambda_1 t} \\ x_2 &= e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

Sappiamo già che la soluzione generale si avrà facendo una combinazione lineare:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Valutiamo il segno di $\lambda_{1,2}$, separando i vari casi e tenendo a mente che questi esponenziali non possono esplodere a ∞ perché questo implicherebbe una generazione di energia dal nulla.



Dimostrazione 4.2 — Oscillatore armonico smorzato: SOVRA-SMORZATO

$$\Delta > 0 \Rightarrow \gamma^2 > \omega_p^2$$

Osserviamo cosa succede agli esponenziali.

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= -\gamma - \sqrt{\Delta} \Rightarrow \lambda_2 < 0 \\ \lambda_1 &= -\gamma + \sqrt{\Delta} \Rightarrow -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_p^2} < 0 \Rightarrow \lambda_1 < 0\end{aligned}$$

Abbiamo quindi una combinazione lineare valida:

$$x(t) = C_1 e^{-|\lambda_1|t} + C_2 e^{-|\lambda_2|t}$$

Scritta in questo modo si nota perfettamente che sono 2 esponenziali che tendono a 0 senza aver compiuto un'oscillazione vera e propria. Questo sistema si chiama: SOVRA-SMORZATO.

Dimostrazione 4.3 — Oscillatore armonico smorzato: SMORZAMENTO CRITICO

Passiamo alla seconda possibilità:

$$\Delta = 0$$

Questo ci crea non pochi problemi perché ora abbiamo una sola equazione e non 2 soluzioni particolari.

$$\lambda = -\gamma \Rightarrow x_1(t) = e^{-\gamma t}$$

Per trovare una nuova soluzione possiamo aggiungere un polinomio a questa soluzione. Così facendo otteniamo:

$$x_2(t) = t e^{-\gamma t}$$

La nostra combinazione lineare è quindi:

$$x(t) = e^{-\gamma t} (C_1 + C_2 t)$$

Questo sistema viene chiamato SMORZAMENTO CRITICO. Questo è quello che si vuole ottenere in sistemi meccanici reali come i pistoni di una macchina.



Dimostrazione 4.4 — Oscillatore armonico smorzato: SOTTO-SMORZATO

Ora abbiamo l'ultimo caso:

$$\Delta < 0$$

Come sappiamo le soluzioni sono complesse coniugate:

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= -\gamma \pm i\sqrt{\omega_p^2 - \gamma^2} \\ x_1(t) &= e^{-\gamma t} * e^{i\omega t} \\ x_2(t) &= e^{-\gamma t} * e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

In queste formulazioni compare:

Definizione 4.2 — Omega

$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 - \gamma^2}$$

Noi sappiamo dalle formule di Eulero:

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$$

Di conseguenza:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= e^{-\gamma t} \cos \omega t + i e^{-\gamma t} \sin \omega t \\ x_2(t) &= e^{-\gamma t} \cos \omega t - i e^{-\gamma t} \sin \omega t\end{aligned}$$

Ci accorgiamo che queste 2 soluzioni indipendenti sono comunque una combinazione lineare di soluzioni più semplici da scrivere, per non dover portare in giro tutta quella roba riscriviamo:

$$\begin{aligned}\hat{x}_1(t) &= e^{-\gamma t} \cos \omega t \\ \hat{x}_2(t) &= e^{-\gamma t} \sin \omega t\end{aligned}$$

La soluzione totale è quindi:

$$x(t) = e^{-\gamma t} [C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t]$$

Come prima è possibile riscrivere questa soluzione come:

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

In questo caso l'oscillatore è detto SOTTO-SMORZATO o DEBOLMENTE SMORZATO



Dimostrazione 4.5 — Trasformazione dell'equazione

Partiamo dall'espressione

$$x(t) = e^{-\gamma t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)].$$

Vogliamo riscriverla nella forma

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi).$$

Utilizziamo l'identità trigonometrica

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos \varphi \cos(\omega t) - \sin \varphi \sin(\omega t).$$

Pertanto

$$A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos \varphi \cos(\omega t) - A \sin \varphi \sin(\omega t).$$

Confrontando con l'espressione iniziale otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} C_1 = A \cos \varphi, \\ C_2 = -A \sin \varphi. \end{cases}$$

Elevando al quadrato e sommando:

$$C_1^2 + C_2^2 = A^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = A^2,$$

da cui

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}.$$

Per la fase:

$$\tan \varphi = -\frac{C_2}{C_1}.$$

Quindi la soluzione può essere riscritta come

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi),$$

dove

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \varphi = \arctan\left(-\frac{C_2}{C_1}\right).$$

4.1 Condizioni iniziali

Come fatto per l'oscillatore armonico semplice vogliamo trovare un legame tra le condizioni iniziali e i parametri dell'equazione.

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

Come prima valutiamo sia la posizione che la velocità in 0.

$$align * x(0) = A \cos \varphi$$

$$\frac{dx}{dt} = -\gamma Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi) - \omega Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = -\gamma A \cos \varphi + -\omega A \sin \varphi$$



Si nota subito che questa non è una soluzione lineare, ma possiamo fare alcune semplificazioni del nostro sistema:

$$\begin{cases} x(0) = A \cos \varphi \\ v(0) = -\gamma x(0) - \omega A \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(0) = A \cos \varphi \\ -v(0) - \gamma x(0) = \omega A \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2(0) = A^2 \cos^2 \varphi \\ \left(\frac{v(0) + \gamma x(0)}{\omega} \right)^2 = A^2 \sin^2 \varphi \end{cases}$$

Ora sommandole otteniamo:

$$A^2 = x^2(0) + \left(\frac{v(0) + \gamma x(0)}{\omega} \right)^2$$

Mentre il rapporto fatto prima di quadrarle ci restituisce:

$$\tan \varphi = -\frac{v(0) + \gamma x(0)}{\omega} * \frac{1}{x(0)}$$

5 Energia Oscillatore Armonico Smorzato

Riscriviamo l'equazione:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$E_m = K + U = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}\alpha x^2$$

$$\frac{dx}{dt} = -A\gamma e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi) - A\omega e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi)$$

A questo punto abbiamo tutto quello che ci serve per ricavare E.

$$K = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2}mA^2e^{-2\gamma t}[\gamma \cos(\omega t + \varphi) - \omega \sin(\omega t + \varphi)]^2$$

5.1 Prima approssimazione

La formula è molto pesante da portare in giro e per semplificarla dobbiamo fare delle approssimazioni. Accettiamo che $\gamma \ll \omega$, questo ha senso perché stiamo studiando il caso più interessante: quando il moto prosegue per un po' e non tutta l'energia viene completamente fermato.

Con questa ipotesi vale: $\gamma \cos(\dots) \ll \omega \sin(\dots)$.

$$K \simeq \frac{1}{2}mA^2e^{-2\gamma t}\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

Nell'energia, e non nella fase (in quanto l'errore si accumulerebbe ciclo per ciclo), possiamo approssimare ancora e osservare che se $\gamma \ll \omega \Rightarrow \omega \simeq \omega_p = \frac{\alpha}{m}$.

$$K = \frac{1}{2}\alpha A^2 e^{-2\gamma t} \sin^2(\omega t + \varphi)$$



Torniamo all'energia meccanica totale.

$$E_m = K + U = \frac{1}{2}\alpha A^2 e^{-2\gamma t} \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}\alpha A^2 e^{-2\gamma t} \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}\alpha A^2 e^{-2\gamma t}$$

$$E_m = \frac{1}{2}\alpha A^2 e^{-2\gamma t} = \frac{1}{2}m\omega_p^2 A^2 e^{-2\gamma t}$$

In questa approssimazione l'energia meccanica decade come un esponenziale con costante $-2\gamma t$. Ovviamente questo vale in determinate approssimazioni, infatti non ha senso che l'energia durante un ciclo si perda sempre allo stesso modo, questo perché tanto più si muove rapidamente il grave tanto più fa attrito.

5.2 Seconda approssimazione

Poiché abbiamo preso l'andamento oscillatorio dell'energia meccanica vogliamo un'approssimazione migliore e più precisa. Ripartiamo dall'energia:

$$E_m = K + U = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}\alpha x^2$$

Cerchiamo di capire come varia:

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2}2m \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{2}2\alpha \frac{dx}{dt} x = \frac{dx}{dt} \left(m \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x \right)$$

Se torniamo all'equazione del moto ci accorgiamo che:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= -\alpha x - 2\gamma m \frac{dx}{dt} \\ m \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x &= -2\gamma m \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

Sostituendo alla nostra equazione:

$$E_m = -2\gamma m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

Possiamo dimostrare che tutte le perdite sono legate alla forza di attrito viscoso. Intuitivamente è l'unica forza non conservativa e quindi è l'unica che può disperdere energia. Dimostriamolo:

$$dW = F_v dx \Rightarrow P_{visc} = \frac{dW}{dt} = F_v * \frac{dx}{dt} = -2\gamma m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

Scriviamo la formula in modo chiaro:

$$\frac{dE_m}{dt} = -2\gamma m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = -2\gamma m A^2 \omega_p^2 e^{-2\gamma t} \sin^2(\omega t + \varphi)$$

6 Oscillatore armonico forzato

L'oscillatore smorzato è destinato a fermarsi, immaginiamo di dare energia al sistema. Introduciamo quindi una forzate:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_p^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_F t$$



Oscillatore forzato con forzante periodica o armonica.

Anche in questo caso bisogna identificare una soluzione e la teoria delle equazioni differenziali ci dice che si ottiene sommando la soluzione generale per l'equazione differenziale omogenea associata e una soluzione particolare dell'equazione completa.

Nel nostro caso noi già abbiamo la soluzione generale dell'omogenea associata:

$$x_0(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Perciò la soluzione generale sarà:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0) + x_p(t)$$

Come troviamo $x_p(t)$? Sicuramente ha una forma ben specifica:

$$x_p(t) = B \cos(\omega_f t + \varphi)$$

Quali valori di B e φ , se esistono, devo sostituire?

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0) + B \cos(\omega_f t + \varphi)$$

Questa è molto interessante perché per $t \gg \tau = \frac{1}{\gamma}$, superata la fase transiente, $x(t) = x_p(t)$. In altre parole quando il sistema va a regime la componente che decade come un esponenziale è 0. Tutto quello che resta è soltanto l'onda data dalla forzante.

Dimostrazione 6.1 — Dimostrazione della soluzione, parte 1

Introduciamo una funzione complessa $z(t)$ tale che $x(t) = \Re[z(t)]$. Poiché $\cos \alpha = \Re(e^{i\alpha})$, l'equazione reale equivale alla parte reale di

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2\gamma \frac{dz}{dt} + \omega_p^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_f t}.$$

Consideriamo prima l'equazione omogenea:

$$\frac{d^2 z_h}{dt^2} + 2\gamma \frac{dz_h}{dt} + \omega_p^2 z_h = 0.$$

La soluzione caratteristica è $z_h(t) = Ce^{(-\gamma + i\omega)t}$, dove $\omega = \sqrt{\omega_p^2 - \gamma^2}$. Scrivendo $C = Ae^{i\varphi_0}$, otteniamo

$$z_h(t) = Ae^{-\gamma t} e^{i(\omega t + \varphi_0)}.$$

Prendendo la parte reale:

$$x_h(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0),$$

che è il primo termine richiesto.



Dimostrazione 6.2 — Dimostrazione della soluzione, parte 2

Cerchiamo ora una soluzione particolare nella forma $z_p(t) = Ke^{i\omega_f t}$. Calcoliamo le derivate:

$$\frac{dz_p}{dt} = i\omega_f K e^{i\omega_f t}, \quad \frac{d^2 z_p}{dt^2} = -\omega_f^2 K e^{i\omega_f t}$$

Sostituendo nell'equazione complessa:

$$(-\omega_f^2 K + 2i\gamma\omega_f K + \omega_p^2 K)e^{i\omega_f t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_f t}$$

Dividendo per $e^{i\omega_f t}$:

$$K(\omega_p^2 - \omega_f^2 + 2i\gamma\omega_f) = \frac{F_0}{m}$$

Da cui:

$$K = \frac{F_0/m}{\omega_p^2 - \omega_f^2 + 2i\gamma\omega_f}$$

Scriviamo $K = Be^{i\varphi}$. Allora:

$$z_p(t) = Be^{i(\omega_f t + \varphi)}$$

Prendendone la parte reale:

$$x_p(t) = B \cos(\omega_f t + \varphi)$$

che coincide con il secondo termine della soluzione proposta.

La soluzione complessiva è:

$$z(t) = Ae^{(-\gamma + i\omega)t} e^{i\varphi_0} + Be^{i(\omega_f t + \varphi)}$$

Prendendo la parte reale si ottiene finalmente:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0) + B \cos(\omega_f t + \varphi)$$

che soddisfa l'equazione originale. CVD.

6.1 Condizioni Iniziali

Sfruttiamo i risultati della dimostrazione. Poniamo ora $D = \omega_p^2 - \omega_f^2 + 2i\gamma\omega_f$

Il modulo del denominatore è

$$|D| = \sqrt{(\omega_p^2 - \omega_f^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2}$$

Quindi il modulo di K è

$$B = |K| = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_p^2 - \omega_f^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2}}$$

Scriviamo ora $K = Be^{i\varphi}$, proprio come nella dimostrazione. Per determinare l'angolo φ osserviamo che K è il reciproco (a meno di un fattore reale positivo F_0/m) del numero complesso

$$D = a + ib \quad \text{con} \quad a = \omega_p^2 - \omega_f^2, \quad b = 2\gamma\omega_f$$

Il motivo per cui compare il reciproco risulta dalla soluzione particolare: si impone la forma $z_p(t) = Ke^{i\omega_f t}$, la si inserisce nell'equazione differenziale e i termini derivati producono un



fattore complesso moltiplicativo che è proprio D . Per soddisfare l'equazione, questo fattore deve essere compensato dividendo per esso, dunque K è proporzionale a $1/D$. In altre parole, il numero complesso D "pesa" la risposta del sistema, e K deve contenerne il reciproco per annullarlo.

Il numero $D = a + ib$ può essere rappresentato come vettore nel piano complesso con una certa lunghezza $|D|$ e un certo angolo θ . Questo angolo soddisfa:

$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

perché il rapporto tra parte immaginaria e parte reale è la tangente dell'angolo del vettore.

Dunque possiamo scrivere

$$D = |D| e^{i\theta}$$

Il reciproco ha la forma

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{|D|} e^{-i\theta}$$

Qui si vede immediatamente che il reciproco inverte l'angolo del numero complesso. Otteniamo quindi

$$\varphi = -\theta = -\arctan\left(\frac{2\gamma\omega_f}{\omega_p^2 - \omega_f^2}\right)$$

6.2 Casi particolari

Compresa la natura delle condizioni iniziali possiamo fare una minima discussione di quello che succede per semplici limiti notevoli.

Caso $\gamma \sim 0$

Quando lo smorzamento è molto piccolo, il termine transitorio decade molto lentamente e il sistema si comporta come un oscillatore quasi conservativo. In particolare, nel coefficiente di risposta stazionaria

$$B = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_p^2 - \omega_f^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2}}$$

il termine $2\gamma\omega_f$ al denominatore diventa trascurabile tranne che in prossimità della risonanza. Ne segue che, lontano dalla risonanza, la risposta del sistema è molto piccola, mentre in prossimità di $\omega_f \sim \omega_p$ il denominatore tende a valori molto bassi e l'ampiezza cresce sensibilmente. Nel limite $\gamma \rightarrow 0$ la risonanza tende a diventare infinitamente "stretta" e il sistema oscilla con ampiezza molto grande quando la frequenza di forzamento coincide con quella naturale.

Caso $\omega_f \sim \omega_p$

Quando la frequenza di forzamento si avvicina alla frequenza naturale, il termine

$$(\omega_p^2 - \omega_f^2)^2$$

nel denominatore della risposta si riduce drasticamente. Il valore di B diventa quindi dominato dal termine di smorzamento

$$(2\gamma\omega_f)^2$$

e ciò porta a un picco di ampiezza attorno alla risonanza. Per γ piccolo, questo picco è particolarmente accentuato e la curva della risposta assume la tipica forma risonante molto appuntita. In sintesi, per $\omega_f \sim \omega_p$ la risposta del sistema è grande e dominata quasi completamente dal regime forzato, mentre il transitorio diventa trascurabile dopo tempi brevi.



Comportamento di φ per $\omega_f \sim \omega_p$

La fase si ottiene da

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{2\gamma\omega_f}{\omega_p^2 - \omega_f^2}\right)$$

Quando ω_f si avvicina a ω_p , il termine $\omega_p^2 - \omega_f^2$ tende a zero e il rapporto nella tangente diventa molto grande. Ciò implica che l'angolo tende a

$$\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

poiché la tangente cresce senza limite e l'arcotangente tende a $\pm\pi/2$ a seconda del segno. Nel caso tipico con $\gamma > 0$ e ω_f crescente verso ω_p , l'argomento è positivo e dunque la fase risulta negativa e vicina a $-\pi/2$.

Fisicamente questo significa che, in prossimità della risonanza, l'oscillazione imposta dal forzamento è in ritardo di un quarto di periodo rispetto alla forza esterna, comportamento caratteristico degli oscillatori debolmente smorzati. Si dice che oscillazione e forzamento sono in quadratura di fase.

7 Energia oscillatore armonico forzato

Per situazioni $\tau \gg \frac{1}{\gamma}$ vale la soluzione:

$$x(t) = B \cos(\omega t + \varphi)$$

Come sempre sappiamo:

$$E_m = K + U \quad K = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \quad U = \frac{1}{2}\alpha x^2$$

Facciamo la derivata della soluzione:

$$\frac{dx}{dt} = -B\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

Sostituendo otteniamo:

$$K = \frac{1}{2}mB^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad U = \frac{1}{2}\alpha B^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

Ricordiamo che $\omega_p^2 = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow \alpha = \omega_p^2 m$. La soluzione risulta quindi:

$$E_m = K + U = \frac{1}{2}mB^2 (\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \omega_p^2 \cos^2(\omega t + \varphi))$$

Questa formula sembra del tutto simile alla soluzione che avevamo trovato per il moto armonico semplice, ma i 2 termini non si compensano esattamente. Ciò è ragionevole in quanto l'energia cinetica è data dal moto forzato, mentre l'energia elastica segue il moto della molla. Infatti se la forzante fosse in risonanza ($\omega = \omega_p$):

$$E_m = \frac{1}{2}m\omega_p^2 B^2$$

Ritroviamo un oscillatore armonico semplice. In questo modo stiamo dando l'energia istantaneamente quando viene persa con la forzante.



Torniamo al caso generale:

$$\begin{aligned}
 E_m &= K + U = \frac{1}{2}mB^2 (\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \omega_p^2 \cos^2(\omega t + \varphi)) \\
 E_m &= \frac{1}{2}mB^2 \{\omega^2 [1 - \cos^2(\omega t + \varphi)] + \omega_p^2 \cos^2(\omega t + \varphi)\} \\
 E_m &= \frac{1}{2}mB^2 \{\omega^2 + (\omega_p^2 - \omega^2) \cos^2(\omega t + \varphi)\}
 \end{aligned}$$

L'equazione dell'energia non decade ma oscilla tra 2 valori d'energia. L'oscillatore è quindi un moto perpetuo, ma questo non va contro le leggi della fisica poiché al sistema viene continuamente data energia.

8 Sistemi a più gradi di libertà

Partiamo da un modello molto semplice: 2 pendoli legati da una molla. I 2 pendoli sarebbero totalmente indipendenti se non fosse per la molla. Facciamo un po' di nomenclatura:

- m : massa delle molle
- K : costante elastica della molla
- x_1 : spostamento della massa 1 dall'equilibrio
- x_2 : spostamento della massa 2 dall'equilibrio
- l : lunghezza del pendolo

Possiamo scrivere:

$$F_1 = -\frac{mg}{l}x_1 - K(x_1 - x_2) \quad F_2 = -\frac{mg}{l}x_2 - K(x_2 - x_1)$$

Scriviamo le equazioni del moto per le 2 masse:

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{mg}{l}x_1 - K(x_1 - x_2) \quad m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{mg}{l}x_2 - K(x_2 - x_1)$$

Sommiamo e sottraiamo le 2 equazioni:

$$\begin{aligned}
 m \left(\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{d^2 x_2}{dt^2} \right) &= -\frac{mg}{l}(x_1 + x_2) \\
 m \left(\frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{d^2 x_2}{dt^2} \right) &= -\frac{mg}{l}(x_1 - x_2) - 2K(x_1 - x_2)
 \end{aligned}$$

A questo punto definisco $u_a = x_1 + x_2$ e $u_b = x_1 - x_2$. Otteniamo 2 equazioni:

$$\begin{aligned}
 m \frac{d^2 u_a}{dt^2} &= -\frac{mg}{l}u_a \\
 m \frac{d^2 u_b}{dt^2} &= -\frac{mg}{l}u_b - 2Ku_b
 \end{aligned}$$

Queste sono equazioni sono indipendenti e sappiamo come risolverle.

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 u_a}{dt^2} + \frac{g}{l}u_a &= 0 & \frac{d^2 u_a}{dt^2} + \omega_a^2 u_a &= 0 \\
 \frac{d^2 u_b}{dt^2} + \left(\frac{g}{l} + 2\frac{K}{m} \right) u_b &= 0 & \frac{d^2 u_b}{dt^2} + \omega_b^2 u_b &= 0
 \end{aligned}$$



Le soluzioni sono quindi:

$$u_a = A_a \cos(\omega_a t + \varphi_a) \quad u_b = A_b \cos(\omega_b t + \varphi_b)$$

Ora noi dobbiamo tornare indietro a x_1, x_2 .

$$x_1(t) = \frac{u_a + u_b}{2}$$

$$x_2(t) = \frac{u_a - u_b}{2}$$

Abbiamo completato lo studio del sistema. Se osserviamo i moti dei pendoli questi sono la sovrapposizione di 2 moti semplici. Nel modo u_a le 2 masse si muovono insieme e la molla non fa nulla, mentre nel modo u_b i pendoli si contraggono e si aprono in modo simmetrico. Il nostro moto complesso diventa facile da studiare se pensato come la sovrapposizione di 2 moti distinti e indipendenti. Questi sono chiamati MODI NORMALI, nel caso specifico informalmente sono chiamati modo a pendolo e modo a respiro.

9 Battimenti

Pendiamo l'esempio precedente e caliamoci nel caso specifico dove il pendolo parte da fermo con le seguenti posizioni iniziali:

$$x_1(0) = -2A \quad x_2(0) = 0$$

Se noi vogliamo studiare quello che sta succedendo dobbiamo scomporre la nostra condizione iniziale nei 2 modi semplici. Facciamo una prova ragionata: prendendo il modo a pendolo e mettendolo a $-A$ avremmo che

$$x_1(0) = -A \quad x_2(0) = -A$$

A questo punto introduciamo un modo a respiro che sia "allargato" di una A . Il nostro modo a respiro avrebbe condizione iniziale:

$$x_1(0) = -A \quad x_2(0) = +A$$

La somma dei 2 modi all'istante iniziale dà la condizione iniziale:

$$x_1(0) = -2A \quad x_2(0) = 0$$

Abbiamo quindi scomposto il caso iniziale nei suoi 2 modi normali.

$$\omega_a = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \omega_b = \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}}$$

Se osserviamo il moto della massa 1 x_1 ci accorgiamo che è la somma di 2 oscillazioni simili ma non uguali. L'effetto prodotto è quello di un'oscillazione che ogni tanto interferisce in modo costruttivo ed ogni tanto in modo distruttivo. Questo fenomeno si chiamano BATTIMENTI.

$$x_1(t) = C_a \cos(\omega_a t + \varphi_a) + C_b \cos(\omega_b t + \varphi_b)$$

Nel caso specifico: $\varphi_a = \varphi_b = 0$, $C_a = C_b$:

$$x_1(t) = A[\cos(\omega_a t) + \cos(\omega_b t)]$$



Usiamo le formule di Prostaferesi:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad \alpha = \omega_a t \quad \beta = \omega_b t$$

Definiamo 2 variabili con nomi che sembrano casuali, ma diventeranno chiari:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\omega_a + \omega_b}{2} t = \omega_M t \quad \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\omega_a - \omega_b}{2} t = \omega_{inv} t$$

Ne risulta che:

$$x_1(t) = 2 \cos(\omega_M t) \cos(\omega_{inv} t)$$

Risulta chiaro che $\omega_{inv} \ll \omega_M$. Se noi grafichiamo questo andamento ci accorgeremmo che ω_{inv} rappresenta l'involuppo della curva, mentre ω_M le oscillazioni più piccole che avvengono nel "range" definito dall'involuppo.

10 Due masse collegate da tre molle

Consideriamo ora un sistema più semplice rispetto ai pendoli sempre con 2 gradi di libertà. Abbiamo due masse identiche collegate da tre molle tutte uguali tra loro. Il moto avviene nel piano e assumiamo la condizione di piccoli spostamenti verticali rispetto alla distanza di riposo:

$$\frac{y_i}{a} \ll 1$$

Definiamo:

- m : massa delle due masse
- K : costante elastica delle tre molle
- a : distanza di riposo tra gli attacchi delle molle
- y_1 : spostamento verticale della massa 1
- y_2 : spostamento verticale della massa 2

Nel limite degli angoli piccoli valgono le approssimazioni:

$$\sin \theta \simeq \theta \simeq \tan \theta$$

Tutte le componenti orizzontali delle forze risultano di ordine superiore e quindi trascurabili. La tensione nelle molle in equilibrio vale $T_0 = Ka$. Quando il sistema viene deformato, le componenti verticali delle tensioni generano le forze risultanti.

10.1 Forze sulle masse

Per la massa 1 le due molle (una verso la parete e una verso la massa 2) danno contributi:

$$F_{1y} = -T_0 \frac{y_1}{a} - T_0 \frac{y_1 - y_2}{a}$$

Per la massa 2 otteniamo:

$$F_{2y} = -T_0 \frac{y_2}{a} - T_0 \frac{y_2 - y_1}{a}$$

Scriviamo le equazioni del moto:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= -2 \frac{T_0}{a} y_1 + \frac{T_0}{a} y_2 \\ m \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= -2 \frac{T_0}{a} y_2 + \frac{T_0}{a} y_1 \end{aligned}$$

Queste equazioni sono accoppiate come nel caso dei pendoli.



10.2 Combinazioni simmetrica e antisimmetrica

Sommiamo e sottraiamo le due equazioni:

$$\begin{aligned}\frac{d^2(y_1 + y_2)}{dt^2} &= -\frac{T_0}{ma}(y_1 + y_2) \\ \frac{d^2(y_1 - y_2)}{dt^2} &= -3\frac{T_0}{ma}(y_1 - y_2)\end{aligned}$$

Introduciamo le variabili:

$$u_a = y_1 + y_2 \quad u_b = y_1 - y_2$$

Otteniamo due oscillatori disaccoppiati:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u_a}{dt^2} + \omega_a^2 u_a &= 0 & \omega_a^2 &= \frac{T_0}{ma} \\ \frac{d^2 u_b}{dt^2} + \omega_b^2 u_b &= 0 & \omega_b^2 &= 3\frac{T_0}{ma}\end{aligned}$$

Le soluzioni generali sono:

$$u_a = A_a \cos(\omega_a t + \varphi_a) \quad u_b = A_b \cos(\omega_b t + \varphi_b)$$

Riscriviamo y_1 e y_2 :

$$\begin{aligned}y_1(t) &= \frac{u_a + u_b}{2} \\ y_2(t) &= \frac{u_a - u_b}{2}\end{aligned}$$

10.3 Interpretazione fisica dei modi

Come nel caso dei pendoli, i modi normali hanno una chiara interpretazione:

Modo simmetrico u_a

$$y_1 = y_2$$

Le masse oscillano insieme. La molla centrale non si deforma e non modifica la tensione.

Modo antisimmetrico u_b

$$y_1 = -y_2$$

Le masse oscillano in opposizione di fase e la molla centrale si allunga e si accorcia durante il moto. La frequenza è maggiore perché intervengono tre molle invece di una sola.

10.4 Generalizzazione e limite continuo

Un sistema con N gradi di libertà possiede esattamente N modi normali. Ogni configurazione del moto può essere scritta come combinazione lineare dei modi.

Aumentando il numero delle masse:

- il primo modo è sempre quello a frequenza più bassa e con tutte le masse in fase
- gli altri modi presentano un numero crescente di inversioni di fase

Nel limite $N \rightarrow \infty$ otteniamo una corda continua con infiniti modi normali:

modo fondamentale, secondo modo, terzo modo, ...

Ogni oscillazione possibile della corda può essere espressa come combinazione lineare dei suoi modi normali. Questo principio è alla base della decomposizione di Fourier e della descrizione ondulatoria dei sistemi con infiniti gradi di libertà.



11 Derivazione continua dell'equazione d'onda

Nelle lezioni precedenti abbiamo visto come, aumentando il numero di gradi di libertà, aumenti anche il numero dei modi normali. Nel caso di due pendoli collegati da una molla avevamo due modi: il modo a pendolo e il modo a respiro. Ora vogliamo capire che cosa accade quando portiamo il numero di gradi di libertà a valori molto grandi fino ad avvicinarci ad un sistema continuo.

Per motivarci partiamo dal modello già affrontato: masse collegate da molle. Generalizziamo la configurazione precedente considerando non soltanto due masse collegate, ma una sequenza molto lunga di masse tutte uguali collegate fra loro da molle identiche. Pensiamo a una "collana di perle" infilate su un elastico.

11.1 Ipotesi fisiche fondamentali

- **Corda perfettamente flessibile:** non oppone resistenza alla curvatura, non esiste rigidità intrinseca.
- **Tensione uniforme:** la tensione interna è ovunque uguale a T_0 e non cambia durante l'oscillazione.
- **Oscillazioni piccole:**

$$\left| \frac{d\psi}{dx} \right| \ll 1$$

Questa condizione implica che gli angoli α e β formati dall'elemento di corda con l'orizzontale siano piccoli.

- **Inestensibilità al primo ordine:** la lunghezza reale di un elemento $d\ell$ coincide con dx al primo ordine. Infatti:

$$d\ell = dx \sqrt{1 + \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2} \simeq dx$$

Il termine di ordine secondo $\left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2$ è trascurabile.

- **Gravità trascurabile:** la tensione è molto maggiore del peso per unità di lunghezza, così la componente verticale della tensione compensa l'eventuale contributo gravitazionale.

Queste ipotesi definiscono il regime di validità dell'equazione d'onda per una corda.

Forza sulla massa generica

Indichiamo con $y_i(t)$ lo spostamento verticale della massa i . Le masse adiacenti esercitano forze elastiche pari alla costante elastica T_0 moltiplicata per l'allungamento relativo. Nel caso iniziale la massa 1 sentiva:

$$F_1 = -T_0 (y_1 - y_0) - T_0 (y_1 - y_2)$$

y_0 è lo spostamento della massa alla sua sinistra e y_2 quello della massa a destra.

Generalizzando alla massa i :

$$F_i = -T_0 (y_i - y_{i-1}) - T_0 (y_i - y_{i+1})$$

Raccogliendo:

$$F_i = -T_0 (-y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1})$$



Applicando Newton:

$$m \frac{d^2 y_i}{dt^2} = -T_0 (-y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1})$$

Questa equazione è valida per quasi qualsiasi massa della catena ed è la forma discreta dell'equazione del moto.

11.2 Passaggio alla descrizione spaziale continua

Introduciamo la distanza costante a tra una massa e la successiva. Se la catena è molto fitta possiamo pensare che la coordinata della massa i sia:

$$x = ia$$

In questo modo:

$$y_i(t) \rightarrow y(x, t) \quad y_{i-1}(t) \rightarrow y(x - a, t) \quad y_{i+1}(t) \rightarrow y(x + a, t)$$

Sostituendo:

$$\frac{d^2 y(x, t)}{dt^2} = -\frac{T_0}{m} (-y(x - a, t) + 2y(x, t) - y(x + a, t))$$

Fino a qui non è stata fatta alcuna approssimazione: questa scrittura è ancora esatta per qualsiasi valore di a .

11.3 Espansione di Taylor per a piccolo

Ora usiamo l'ipotesi fondamentale del passaggio al continuo: la separazione a tra le masse è molto più piccola della lunghezza d'onda delle oscillazioni che vogliamo descrivere.

Espandiamo attorno a x :

$$y(x + a, t) = y(x, t) + \frac{dy}{dx}(x, t) a + \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2}(x, t) a^2$$

$$y(x - a, t) = y(x, t) - \frac{dy}{dx}(x, t) a + \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2}(x, t) a^2$$

Sostituiamo nella combinazione dell'equazione discreta:

$$-y(x - a, t) + 2y(x, t) - y(x + a, t)$$

Sostituendo esplicitamente:

$$-y(x - a, t) = -y(x, t) + \frac{dy}{dx}(x, t) a - \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2}(x, t) a^2$$

$$2y(x, t) = 2y(x, t)$$

$$-y(x + a, t) = -y(x, t) - \frac{dy}{dx}(x, t) a - \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2}(x, t) a^2$$

Sommiamo tutto con estrema attenzione:

$$-y(x, t) + \frac{dy}{dx} a - \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} a^2 + 2y(x, t) - y(x, t) - \frac{dy}{dx} a - \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} a^2$$



Osserviamo: - i termini $y(x, t)$ si cancellano completamente - i termini lineari $\frac{dy}{dx}a$ si cancellano - rimangono solo i termini quadratici:

$$-\frac{d^2y}{dx^2}(x, t)a^2$$

Dunque:

$$-y(x-a, t) + 2y(x, t) - y(x+a, t) = -a^2 \frac{d^2y}{dx^2}(x, t)$$

Sostituendo nell'equazione del moto:

$$\frac{d^2y(x, t)}{dt^2} = \frac{T_0}{m} a^2 \frac{d^2y(x, t)}{dx^2}$$

11.4 Introduzione della densità lineare

Siccome il sistema si sta avvicinando a un continuo, introduciamo la densità lineare di massa:

$$\rho_l = \frac{m}{a}$$

Da cui:

$$\frac{T_0}{m} a^2 = \frac{T_0}{\rho_l}$$

L'equazione diventa:

$$\frac{d^2y(x, t)}{dt^2} = \frac{T_0}{\rho_l} \frac{d^2y(x, t)}{dx^2}$$

Questa è la celeberrima **equazione d'onda unidimensionale**, o equazione di d'Alembert:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = v^2 \frac{d^2y}{dx^2} \quad v = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_l}}$$

11.5 Significato fisico

L'equazione mostra che la forza che agisce su un punto della corda è proporzionale alla sua **curvatura** $\frac{d^2\psi}{dx^2}$:

- maggiore curvatura \Rightarrow maggiore forza di richiamo
- il moto risultante è una perturbazione che si propaga con velocità costante v

La soluzione generale è la somma di due onde che viaggiano in direzioni opposte:

$$\psi(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

dove f e g sono determinate dalle condizioni iniziali.

12 Struttura dell'equazione d'onda

Ora che abbiamo ottenuto l'equazione di d'Alembert per una corda vibrante, vogliamo capire in modo più profondo che cosa essa stia descrivendo. Ricordiamo la forma generale:

$$\frac{d^2\psi(x, t)}{dt^2} = \frac{T_0}{\rho_l} \frac{d^2\psi(x, t)}{dx^2}$$

Questa è una **equazione differenziale alle derivate parziali** del secondo ordine. La nostra incognita non è più una funzione di una sola variabile, come nello studio dell'oscillatore armonico, ma una funzione di due variabili indipendenti: lo spazio x e il tempo t .



12.1 Significato delle derivate parziali

In una funzione $\psi(x, t)$ le derivate parziali vengono effettuate tenendo costante una delle due variabili. Per comprenderne il significato:

- $\frac{d\psi}{dx}$ è la pendenza del profilo della corda fissato un certo istante t
- $\frac{d\psi}{dt}$ è la velocità di uno specifico punto della corda, fissata una certa posizione x
- $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ misura la **curvatura** della corda nel punto x
- $\frac{d^2\psi}{dt^2}$ è l'accelerazione del punto x della corda

È dunque un'equazione che collega accelerazione e curvatura. Dal punto di vista fisico questo è esattamente ciò che ci si aspetta: quando il profilo della corda è incurvato, la tensione interna produce una forza che riporta il sistema verso la forma rettilinea.

12.2 Proprietà dell'equazione

Osserviamo alcune caratteristiche fondamentali:

- **Equazione lineare:** compaiono solo derivate lineari della funzione incognita. Ne segue immediatamente il **principio di sovrapposizione**: se ψ_1 e ψ_2 sono soluzioni, qualunque combinazione lineare $a\psi_1 + b\psi_2$ è ancora una soluzione. Questo sarà essenziale quando introdurremo i modi normali della corda.
- **Equazione omogenea:** non è presente alcun termine dipendente solo da x e t . Questo significa che la corda non è soggetta a forzanti esterne durante l'evoluzione.
- **Equazione del secondo ordine:** compaiono derivate seconde sia rispetto allo spazio sia rispetto al tempo. Le condizioni iniziali e al contorno dovranno essere fornite di conseguenza.

12.3 Interpretazione fisica: il ruolo della curvatura

Riscriviamo l'equazione in forma più compatta introducendo il parametro:

$$v = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_l}}$$

Abbiamo ricavato come velocità caratteristica del mezzo. Allora:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = v^2 \frac{d^2\psi}{dx^2}$$

La parte sinistra rappresenta l'accelerazione verticale del punto di corda in x . La parte destra rappresenta la curvatura locale del profilo, moltiplicata per la quantità v^2 che ha le dimensioni di una velocità al quadrato.

Una curvatura positiva implica un'accelerazione che riporta la corda verso la posizione di equilibrio, proprio come accadrebbe per un oscillatore armonico. Questo non è sorprendente: abbiamo visto esplicitamente che la corda continua può essere pensata come il limite di un sistema di infiniti oscillatori armonici accoppiati. L'equazione d'onda è quindi la loro sintesi.



12.4 Analisi dimensionale

Per comprendere meglio il significato del parametro v , osserviamo le sue dimensioni:

$$[T_0] = \text{forza} = \text{kg m s}^{-2} \quad [\rho_l] = \text{kg m}^{-1}$$

quindi:

$$\frac{T_0}{\rho_l} = \frac{\text{kg m s}^{-2}}{\text{kg m}^{-1}} = \text{m}^2 \text{s}^{-2}$$

ovvero:

$$\sqrt{\frac{T_0}{\rho_l}} = \text{velocità}$$

Questo conferma che v rappresenta la velocità con cui una perturbazione si propaga lungo la corda. Si tratta dunque della **velocità di propagazione dell'onda meccanica** in quel mezzo.

12.5 Spazio e tempo non sono indipendenti nella soluzione

L'equazione d'onda impone un vincolo molto forte sulla forma delle soluzioni: non è possibile combinare x e t in modo arbitrario. Affinché la relazione

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = v^2 \frac{d^2\psi}{dx^2}$$

sia soddisfatta, la funzione ψ deve dipendere da x e t attraverso combinazioni del tipo:

$$x - vt \quad x + vt$$

Lo vedremo in modo rigoroso quando cercheremo la soluzione generale. Per ora è importante intuire che la soluzione ha la forma di una perturbazione che si **sposta rigidamente** lungo l'asse x , con velocità costante v .

12.6 Condizioni iniziali e condizioni al contorno

Poiché l'equazione è del secondo ordine in entrambe le variabili, occorrono:

- **due condizioni iniziali** per ogni punto dello spazio:

$$\psi(x, 0) \quad \dot{\psi}(x, 0)$$

che specificano la forma iniziale della corda e la velocità iniziale di ogni suo punto

- **due condizioni al contorno** per determinare completamente la soluzione nel caso di una corda di lunghezza finita

Il caso più importante, e quello che studieremo, è quello della corda con estremi fissi:

$$\psi(0, t) = 0 \quad \psi(L, t) = 0$$

che darà luogo all'emergere di modi normali perfettamente analogo al caso discreto.



12.7 La costante v come legame con i modi normali

Il parametro v^2 determina il legame tra accelerazione e curvatura. Nel caso discreto avevamo:

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -k(x_i - x_{i-1}) - k(x_i - x_{i+1})$$

Nel limite continuo, è divenuto proprio l'equazione d'onda. Ci aspettiamo quindi che le soluzioni siano combinazioni di modi normali, ciascuno con la propria frequenza, e che tali modi costituiscano una base completa delle soluzioni.

13 La velocità di propagazione e il legame con i modi normali

Riprendiamo il ragionamento interrotto: abbiamo osservato che il coefficiente che lega $\frac{d^2 \psi}{dt^2}$ a $\frac{d^2 \psi}{dx^2}$, cioè il rapporto $\frac{T_0}{\rho_l}$, possiede le dimensioni di una velocità al quadrato. Definendo:

$$v = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_l}}$$

Otteniamo l'equazione d'onda nella forma compatta:

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = v^2 \frac{d^2 \psi}{dx^2}$$

Ora vogliamo capire che ruolo giochi questa quantità v . Per farlo torniamo per un attimo al caso degli oscillatori armonici accoppiati.

13.1 Dalla catena discreta al continuo: interpretazione unitaria

Nel caso discreto, per una catena di masse collegate da molle, avevamo equazioni del moto del tipo:

$$m \frac{d^2 y_i}{dt^2} = -k(2y_i - y_{i-1} - y_{i+1})$$

Abbiamo visto che le soluzioni generali erano combinazioni di modi normali, ciascuno con una propria frequenza caratteristica, determinata dalla struttura della catena. Ogni modo era un'oscillazione collettiva in cui tutte le masse oscillavano alla stessa frequenza, pur muovendosi con ampiezze relative diverse.

Nel limite in cui rendiamo la distanza tra le masse sempre più piccola e il numero delle masse tende all'infinito, questo insieme di modi discreti diventa un insieme continuo di modi. Il passaggio:

$$y_{i\pm 1} \rightarrow y(x \pm a) \quad a \rightarrow 0$$

Ci ha portati, attraverso l'espansione di Taylor, all'equazione d'onda. L'operatore discreto

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}$$

si è trasformato nella curvatura $\frac{d^2 \psi}{dx^2}$.

Questo ci dice che la struttura profonda dell'equazione d'onda è la stessa del sistema di oscillatori accoppiati: la corda continua non è altro che un numero infinito di oscillatori armonici accoppiati infinitamente vicini.



13.2 Trama fisica dell'equazione d'onda

Adesso possiamo interpretare in modo intuitivo la forma dell'equazione:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = v^2 \frac{d^2\psi}{dx^2}$$

La derivata seconda spaziale misura quanto la corda è incurvata. Se la corda è localmente curva, allora la tensione produce una forza di richiamo diretta verso la posizione rettilinea. L'accelerazione risultante è esattamente $\frac{d^2\psi}{dt^2}$.

Il fatto che la costante di proporzionalità sia v^2 indica che la risposta dinamica della corda dipende dalle sue proprietà:

- la tensione T_0 stabilisce quanto la corda "tira" per tornare in equilibrio
- la densità lineare ρ_l stabilisce quanta massa viene accelerata

Una tensione maggiore produce onde più veloci, una densità lineare maggiore le rallenta.

13.3 La natura propagativa delle soluzioni

Una conseguenza straordinaria dell'equazione d'onda è che spazio e tempo non possono entrare nella soluzione in modo arbitrario. La funzione ψ deve dipendere da x e t attraverso combinazioni del tipo:

$$x - vt \quad x + vt$$

e questo non è un caso: sono proprio questi due argomenti a rappresentare onde che si propagano senza deformarsi verso destra e verso sinistra.

La forma più generale delle soluzioni è infatti:

$$\psi(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

dove f e g sono funzioni arbitrarie determinate dalla configurazione iniziale della corda.

Questo risultato può sembrare sorprendente, ma segue direttamente dal fatto che:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = v^2 \frac{d^2\psi}{dx^2}$$

impone che ogni "pezzo" della perturbazione si muova con velocità costante v , esattamente come se l'intero profilo della corda fosse trascinato rigidamente lungo l'asse x .

13.4 Il ruolo delle condizioni iniziali e delle condizioni al contorno

A differenza dello oscillatore armonico, qui abbiamo una funzione di due variabili. Per determinare completamente la soluzione servono:

- **due condizioni iniziali**

$$\psi(x, 0) \quad \frac{d\psi}{dt}(x, 0)$$

che specificano forma e velocità della corda all'istante iniziale

- **due condizioni al contorno**, necessarie quando la corda ha lunghezza finita

Il caso più importante, e fisicamente più rilevante, è quello degli estremi fissi:

$$\psi(0, t) = 0 \quad \psi(L, t) = 0$$

Questo vincolo modifica radicalmente l'insieme delle soluzioni possibili: solo alcune funzioni f e g saranno ammissibili, e vedremo che ciò conduce alla quantizzazione dei modi normali, analogamente a quella vista per due masse accoppiate, ma con un numero infinito di modi.



13.5 Verso la ricerca dei modi normali per la corda

Ora che abbiamo capito la struttura matematica dell'equazione d'onda e la natura delle sue soluzioni propagative, possiamo affrontare il passo successivo: trovare le oscillazioni proprie della corda, cioè i **modi normali**.

Come nel caso degli oscillatori accoppiati, ogni modo normale avrà una frequenza propria e rappresenterà un'oscillazione "pura". La soluzione generale sarà la somma di tutti questi modi.

Nella prossima sezione introdurremo il metodo della separazione delle variabili, che ci permetterà di identificare esplicitamente tali modi.

13.6 Condizioni iniziali e completezza dei modi normali

Abbiamo ottenuto che i modi normali della corda lunga l vincolata agli estremi sono descritti da:

$$\psi_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

dove:

$$k_n = \frac{n\pi}{l} \quad \omega_n = v k_n = v \frac{n\pi}{l}$$

e $v = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_l}}$ è la velocità delle onde sulla corda.

A questo punto dobbiamo capire come descrivere una qualunque oscillazione della corda che non sia un singolo modo normale. Nel caso con due gradi di libertà avevamo:

$$x_1(t) = c_a u_a(t) + c_b u_b(t)$$

dove u_a e u_b erano i due modi normali.

Ora, nel continuo, il discorso si generalizza a:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

Questa è la soluzione generale della corda vibrante vincolata agli estremi. È del tutto analoga al caso discreto, ma ora la somma contiene infiniti modi normali.

13.7 Significato fisico delle componenti spaziale e temporale

Per un singolo modo normale:

$$\psi_n(x, t) = Y_n(x) T_n(t)$$

dove:

$$Y_n(x) = \sin(k_n x) \quad T_n(t) = \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

Osserviamo due aspetti fondamentali:

- In ogni modo normale **tutti i punti della corda oscillano con la stessa frequenza** ω_n .
- Le ampiezze spaziali cambiano lungo la corda secondo la forma $Y_n(x)$, che contiene nodi e ventri.

Questo è esattamente ciò che avevamo osservato nel caso discreto dei pendoli accoppiati: ogni modo normale è un oscillatore armonico indipendente.



13.8 Condizioni iniziali per la corda continua

Quando avevamo un solo oscillatore armonico, servivano:

$$x(0) \quad \dot{x}(0)$$

Nel caso con due gradi di libertà servivano:

$$x_1(0) \quad x_2(0) \quad \dot{x}_1(0) \quad \dot{x}_2(0)$$

Ora, nel caso continuo, abbiamo un numero infinito di punti, ognuno dei quali è un grado di libertà. Quindi dobbiamo specificare due funzioni continue:

$$y(x, 0) = f(x)$$

$$\dot{y}(x, 0) = g(x)$$

Queste due funzioni rappresentano:

- la forma iniziale della corda
- la distribuzione iniziale delle velocità lungo la corda

13.9 Ruolo dei modi normali nella ricostruzione della soluzione

Poiché i modi normali $\sin(k_n x)$ formano una base completa per le funzioni che soddisfano le condizioni al contorno $y(0, t) = 0$ e $y(l, t) = 0$, possiamo espandere la condizione iniziale come:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(k_n x)$$

e analogamente:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(k_n x)$$

I coefficienti a_n e b_n si determinano mediante le usuali formule di ortogonalità dei seni:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin(k_n x) dx$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin(k_n x) dx$$

Una volta noti i coefficienti, la soluzione generale si costruisce automaticamente:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\omega_n t) + \frac{b_n}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right) \sin(k_n x)$$

Questa è la forma completa della soluzione dell'equazione di d'Alembert per una corda vincolata agli estremi. È la controparte continua e infinitamente estesa di ciò che avevamo già visto con due oscillatori accoppiati.



13.10 Interpretazione finale

Abbiamo quindi stabilito alcuni punti centrali:

- una corda continua ha infiniti gradi di libertà
- esistono infiniti modi normali, ciascuno con la propria frequenza ω_n
- ogni modo è un oscillatore armonico perfettamente indipendente dagli altri
- qualsiasi moto della corda è una combinazione lineare di questi modi
- le condizioni iniziali determinano i coefficienti della combinazione lineare

Abbiamo quindi completato il passaggio:

sistemi discreti a pochi gradi di libertà \longrightarrow sistemi continui con infiniti modi

e abbiamo visto come l'equazione di d'Alembert racchiuda al suo interno l'intera dinamica della corda vibrante.

14 Onde progressive e significato fisico della velocità v

Consideriamo il generico modo normale della corda vincolata agli estremi:

$$\psi_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t)$$

con

$$k_n = \frac{n\pi}{l} \quad \omega_n = vk_n \quad v = \sqrt{\frac{T_0}{\rho l}}$$

Scriviamo il prodotto seno per coseno tramite le identità ricavate con le formule di Eulero. Usiamo:

$$\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \quad \cos \beta = \frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2}$$

Allora

$$\sin(k_n x) \cos(\omega_n t) = \frac{1}{4i} (e^{i(k_n x + \omega_n t)} - e^{-i(k_n x + \omega_n t)} + e^{i(k_n x - \omega_n t)} - e^{-i(k_n x - \omega_n t)})$$

e riconvertendo in seni:

$$\sin(k_n x) \cos(\omega_n t) = \frac{1}{2} (\sin(k_n x + \omega_n t) + \sin(k_n x - \omega_n t))$$

Otteniamo quindi la decomposizione fondamentale:

$$\psi_n(x, t) = \frac{A_n}{2} \sin(k_n x + \omega_n t) + \frac{A_n}{2} \sin(k_n x - \omega_n t)$$

Le due funzioni sono onde della forma:

$$f(x, t) = \sin(k_n x \pm \omega_n t)$$

Scriviamo $\omega_n = vk_n$:

$$\sin(k_n x \pm vk_n t) = \sin[k_n(x \pm vt)]$$



Introduciamo una variabile di fase:

$$\phi_{\pm}(x, t) = k_n(x \pm vt)$$

Una funzione $f(x \pm vt)$ è una traslazione rigida nel tempo. Se definiamo:

$$g(x) = \sin(k_n x)$$

allora:

$g(x - vt)$ si sposta verso destra con velocità v

$g(x + vt)$ si sposta verso sinistra con velocità v

Dunque ogni modo normale è somma di due onde progressive uguali che viaggiano in direzioni opposte:

$$\psi_n(x, t) = \frac{A_n}{2} g(x - vt) + \frac{A_n}{2} g(x + vt)$$

La velocità v non è la velocità dei punti della corda, bensì la velocità con cui si trasmette la perturbazione.

L'equazione d'onda garantisce che:

$$\text{se } y(x, t) = f(x - vt) \quad \text{allora} \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = v^2 \frac{d^2 y}{dx^2}$$

e lo stesso vale per $g(x + vt)$.

Questo mostra che:

1. I modi normali sono onde stazionarie formate da 2 onde progressive opposte
2. Le onde progressive viaggiano con velocità $v = \sqrt{T_0 \rho_l^{-1}}$
3. I punti della corda oscillano verticalmente, ma l'informazione si trasferisce orizzontalmente con velocità v

Per una corda generica, la soluzione completa:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

può essere vista come somma di onde progressive:

$$y(x, t) = F(x - vt) + G(x + vt)$$

dove F e G derivano dalle condizioni iniziali.

15 Soluzione generale dell'equazione d'onda e metodo di d'Alembert

Nel caso della corda vincolata agli estremi abbiamo visto che ogni modo normale può essere riscritto come somma di due onde che si muovono in direzioni opposte. Per il modo n :

$$\psi_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

si ottiene

$$\psi_n(x, t) = \frac{A_n}{2} \sin(k_n x + \omega_n t + \varphi_n) + \frac{A_n}{2} \sin(k_n x - \omega_n t + \varphi_n)$$



Usando $\omega_n = vk_n$:

$$\sin(k_n x \pm \omega_n t + \varphi_n) = \sin[k_n(x \pm vt) + \varphi_n]$$

Si vede quindi che ogni modo normale è somma di due onde della forma

$$f(x - vt) \quad g(x + vt)$$

La soluzione generale della corda vincolata è

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

e poiché ogni termine è somma di un'onda progressiva e una regressiva si può scrivere

$$\psi(x, t) = F(x - vt) + G(x + vt)$$

dove F e G dipendono dalle condizioni iniziali.

15.1 Metodo di d'Alembert

Consideriamo ora l'equazione d'onda nella forma

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2\psi}{dt^2}$$

Definiamo le nuove variabili:

$$\xi = x - vt \quad \eta = x + vt$$

La funzione $\psi(x, t)$ diventa $\psi(\xi, \eta)$.

Calcoliamo le derivate usando la regola della funzione composta.

Derivata prima in x

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial\xi} \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial x} = \psi_\xi + \psi_\eta$$

Derivata seconda in x Deriviamo di nuovo:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \psi_{\xi\xi} + 2\psi_{\xi\eta} + \psi_{\eta\eta}$$

Derivata prima in t

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \psi_\xi \frac{\partial\xi}{\partial t} + \psi_\eta \frac{\partial\eta}{\partial t} = -v\psi_\xi + v\psi_\eta$$

Derivata seconda in t

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\psi_{\xi\xi} - 2v^2\psi_{\xi\eta} + v^2\psi_{\eta\eta}$$

Ora imponiamo l'equazione d'onda:

$$\psi_{\xi\xi} + 2\psi_{\xi\eta} + \psi_{\eta\eta} = \psi_{\xi\xi} - 2\psi_{\xi\eta} + \psi_{\eta\eta}$$

I primi e gli ultimi termini si cancellano. Rimane:

$$4\psi_{\xi\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_{\xi\eta} = 0$$



Integrare rispetto a ξ implica che ψ_η non dipende da ξ :

$$\psi_\eta(\xi, \eta) = f(\eta)$$

Integrare rispetto a η dà:

$$\psi(\xi, \eta) = F(\eta) + G(\xi)$$

Tornando alle variabili originali:

$$\psi(x, t) = F(x + vt) + G(x - vt)$$

Questa è la soluzione più generale dell'equazione d'onda in una dimensione.

15.2 Proprietà delle soluzioni

Una funzione del tipo $\psi(x, t) = F(x - vt)$ rappresenta un'onda che si sposta verso destra. Una funzione del tipo $\psi(x, t) = G(x + vt)$ rappresenta un'onda che si sposta verso sinistra.

La forma dell'onda non cambia durante la propagazione: viene traslata con velocità v .

Il vincolo ottenuto nell'ipotesi di derivata spaziale piccola

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \ll 1$$

garantisce che la corda rimanga tesa e che il modello sia valido.

15.3 Onde armoniche

Consideriamo ora una singola onda armonica:

$$\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

I parametri soddisfano:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \omega = 2\pi\nu \quad \omega = vk$$

La lunghezza d'onda è la distanza tra due massimi successivi. Il periodo è il tempo tra due oscillazioni successive di un punto fissato. La velocità dell'onda vale:

$$v = \frac{\omega}{k} = \lambda\nu$$

A parità di ampiezza, l'energia trasportata è proporzionale ad A^2 .

15.4 Interpretazione geometrica

Per un tempo fissato t_0 la dipendenza spaziale è:

$$\psi(x, t_0) = A \sin(kx + \text{costante})$$

che è un'onda sinusoidale nello spazio.

Per una posizione fissata x_0 la dipendenza temporale è:

$$\psi(x_0, t) = A \sin(\omega t + \text{costante})$$

che è un'oscillazione armonica nel tempo.

Il movimento dei punti della corda è verticale. La propagazione dell'onda è orizzontale con velocità v . La perturbazione trasporta energia e quantità di moto.



16 Potenza e trasporto di energia nelle onde

Una soluzione dell'equazione di d'Alembert che rappresenti un'onda progressiva ha la forma

$$\psi(x, t) = f(x - vt)$$

La derivata temporale è

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{df}{d(x - vt)} \frac{dx - vt}{dt} = -vf'$$

La derivata spaziale è

$$\frac{d\psi}{dx} = f'$$

Da queste due espressioni segue

$$\frac{d\psi}{dt} = -v \frac{d\psi}{dx}$$

che vale per un'onda progressiva. Per un'onda regressiva si ottiene invece

$$\frac{d\psi}{dt} = +v \frac{d\psi}{dx}$$

Consideriamo ora il trasporto di energia lungo la corda. La tensione ha una componente verticale pari a

$$T_\psi = -T_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Per un piccolo spostamento verticale

$$d\psi = \frac{d\psi}{dt} dt$$

Il lavoro elementare è

$$dL = T_\psi d\psi = -T_0 \frac{d\psi}{dx} \frac{d\psi}{dt} dt$$

La potenza istantanea è

$$P(x, t) = \frac{dL}{dt} = -T_0 \frac{d\psi}{dx} \frac{d\psi}{dt}$$

Per un'onda progressiva usiamo $\frac{d\psi}{dt} = -v \frac{d\psi}{dx}$ e otteniamo

$$P = +T_0 v \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2$$

Per un'onda regressiva, usando $\frac{d\psi}{dt} = +v \frac{d\psi}{dx}$ si ottiene

$$P = -T_0 v \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2$$

Il segno distingue la direzione del trasporto. Se $\psi(x, t) = f(x - vt)$ allora anche $P(x, t)$ è funzione di $x - vt$:

$$P(x, t) = P(x - vt)$$

Dunque anche la potenza si propaga come un'onda con velocità v . Consideriamo ora un'onda armonica progressiva

$$\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$



Allora

$$\frac{d\psi}{dx} = Ak \cos(kx - \omega t) \quad \frac{d\psi}{dt} = -A\omega \cos(kx - \omega t)$$

La potenza istantanea diventa

$$P(x, t) = T_0 A^2 k \omega \cos^2(kx - \omega t)$$

La funzione \cos^2 ha periodo π . La potenza media su un periodo si calcola come

$$\overline{P} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi T_0 A^2 k \omega \cos^2 \phi d\phi$$

Usando

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 \phi d\phi = \frac{1}{2}$$

Segue

$$\overline{P} = \frac{1}{2} T_0 A^2 k \omega$$

Poiché $\omega = vk$ otteniamo la forma equivalente

$$\overline{P} = \frac{1}{2} T_0 v k^2 A^2$$

che mostra in modo chiaro la dipendenza quadratica dell'energia trasportata dall'ampiezza dell'onda.

Per interpretare la struttura energetica confrontiamo la fase $\phi = kx - \omega t$ dell'onda con l'espressione di $\cos^2 \phi$ nella potenza. Quando ψ è massima o minima si ha $\cos \phi = 0$ e dunque $P = 0$. Quando ψ passa per lo zero si ha $\cos \phi = \pm 1$ e dunque

$$P_{\max} = T_0 A^2 k \omega$$

La potenza è massima dove l'elemento di corda è nel punto di massimo stiramento locale, cioè dove $\frac{d\psi}{dx}$ è massima. In tali punti anche $\frac{d\psi}{dt}$ è massima per un'onda armonica, quindi l'elemento possiede contemporaneamente massima energia cinetica e massima energia elastica.

La potenza propagata è quindi modulata da una funzione armonica e si muove con velocità v . Graficamente la forma di $\psi(x, t)$ e quella di $P(x, t)$ hanno lo stesso periodo spaziale ma non gli stessi zeri:

$$\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad P = P_{\max}$$

$$\psi = \pm A \quad \Rightarrow \quad P = 0$$

Questo descrive perfettamente il trasferimento di energia associato all'onda armonica sulla corda.

17 Dissipazione radiativa e oscillatore accoppiato alla corda

Consideriamo una massa m collegata ad una molla di costante k e, nello stesso punto, ad una corda tesa di tensione T_0 . Indichiamo con $y(t)$ lo spostamento verticale della massa e con $\psi(x, t)$ lo spostamento della corda, con $\psi(0, t) = y(t)$.

L'equazione dell'oscillatore isolato sarebbe

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky$$



La presenza della corda introduce nuove forze dovute alla tensione T_0 . Nel punto $x = 0$ la corda esercita due contributi orizzontali proiettati verticalmente:

$$F_1 = T_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0^+} \quad F_2 = -T_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0^-}$$

Per un'onda che si propaga verso $+x$ (onda progressiva) la relazione d'Alembert semplificata è

$$\frac{d\psi}{dt} = -v \frac{d\psi}{dx}$$

quindi

$$\frac{d\psi}{dx} = -\frac{1}{v} \frac{d\psi}{dt}$$

Per un'onda regressiva vale invece

$$\frac{d\psi}{dt} = +v \frac{d\psi}{dx}$$

Poiché il moto dell'oscillatore genera a destra onde progressive e a sinistra onde regressive, si può usare

$$\frac{d\psi}{dx} \Big|_{x=0^\pm} = -\frac{1}{v} \frac{d\psi}{dt}(0, t)$$

Poiché $\psi(0, t) = y(t)$:

$$\frac{d\psi}{dt}(0, t) = \frac{dy}{dt}(t)$$

La somma delle due forze della corda diventa

$$F_1 + F_2 = -T_0 \frac{d\psi}{dx}(0^+, t) - T_0 \frac{d\psi}{dx}(0^-, t) = -2T_0 \left(-\frac{1}{v} \frac{dy}{dt} \right)$$

cioè

$$F_1 + F_2 = -\frac{2T_0}{v} \frac{dy}{dt}$$

L'equazione del moto è quindi

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky - \frac{2T_0}{v} \frac{dy}{dt}$$

che riscritta nella forma usuale diventa

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\gamma \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0$$

con

$$\gamma = \frac{T_0}{mv} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Questa è l'equazione di un oscillatore armonico smorzato. Lo smorzamento non è dovuto ad attrito ma alla perdita di energia trasportata via dalla corda sotto forma di onde progressive e regressive. È una dissipazione radiativa.

La soluzione è

$$y(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi) \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

La massa quindi oscilla con ampiezza che decade esponenzialmente. Ogni oscillazione genera sulla corda un'onda che si allontana con velocità v . Dopo un tempo t il fronte dell'onda si trova a

$$x = vt$$



La forma dell'onda sulla corda è data da

$$\psi(x, t) = y(t - x/v)$$

per $x > 0$ e da

$$\psi(x, t) = y(t + x/v)$$

per $x < 0$.

L'involuppo della perturbazione lungo la corda è

$$|\psi(x, t)| = Ae^{-\gamma(t-x/v)}$$

per $t > x/v$.

La parte iniziale dell'onda (generata quando l'ampiezza era maggiore) si trova più lontano, mentre la parte più vicina alla massa è legata all'ampiezza attuale $Ae^{-\gamma t}$. La corda mostra quindi una forma modulata da un involuppo esponenziale che si propaga rigidamente con velocità v . Se si applica una forzante al punto $x = 0$, ad esempio

$$y_{\text{forz}}(t) = B \cos(\Omega t)$$

L'oscillatore produce onde sinusoidali sulla corda di frequenza Ω e ampiezza determinata dal bilancio tra energia fornita dalla forzante ed energia radiata lungo la corda. Dopo il transiente, la corda trasporta energia costante in entrambe le direzioni con potenza media

$$\bar{P} = \frac{1}{2} T_0 A^2 k \Omega$$

per una componente armonica di numero d'onda k .

Questo modello meccanico mostra che la radiazione ondosa agisce come uno smorzamento viscoso e permette il trasferimento di energia lungo la corda. Il fenomeno è analogo alla dissipazione di energia acustica per un altoparlante o alla radiazione elettromagnetica emessa da un dipolo oscillante.

18 Onde acustiche nei fluidi

Passiamo da onde trasversali in un mezzo unidimensionale alle onde longitudinali in un fluido tridimensionale. Un fluido non ha forma propria ed è caratterizzato dall'incapacità di sostenere sforzi di taglio. La grandezza fondamentale per descriverlo è la densità

$$\rho = \frac{M}{V}$$

dove M è la massa contenuta nel volume V .

Un'altra grandezza centrale è la pressione. Per una superficie S , se su di essa agisce una forza totale F_{\perp} perpendicolare alla superficie, la pressione è

$$P = \frac{F_{\perp}}{S}$$

Microscopicamente F_{\perp} deriva dagli urti delle molecole del fluido sulle pareti. Il contributo della i -esima particella è

$$F_{i\perp} = \vec{F}_i \cdot \hat{n}$$

e la pressione totale è

$$P = \frac{1}{S} \sum_i F_{i\perp}$$



L'unità di misura è il Pascal, che vale

$$\text{Pa} = \text{N m}^{-2}$$

Consideriamo ora la pressione atmosferica. La colonna d'aria sopra una superficie S produce una forza peso totale

$$F = \int_0^H g(z)\rho(z)S dz$$

dove $\rho(z)$ diminuisce con l'altezza.

La pressione atmosferica è quindi

$$P = \int_0^H g(z)\rho(z) dz$$

e al livello del mare vale circa

$$P_{\text{atm}} \approx 10^5 \text{ Pa}$$

Per una superficie di area A , la forza esercitata dall'atmosfera è

$$F = P_{\text{atm}}A$$

e per una mano con $A = 10^{-2} \text{ m}^2$ si ottiene

$$F = 10^3 \text{ N}$$

ossia l'equivalente del peso di circa 100 kg. Non percepiamo questa forza perché il nostro corpo contiene fluido interno alla stessa pressione: il principio di Pascal richiede

$$P_{\text{int}} = P_{\text{est}}$$

Il principio di Pascal afferma che in un fluido incomprimibile e in equilibrio statico la pressione è uniforme. In un sistema idraulico, applicando una forza F' su un pistone di area S' e ottenendo una forza F su un pistone di area S , si ha

$$\frac{F'}{S'} = \frac{F}{S}$$

da cui

$$F = F' \frac{S}{S'}$$

che permette la moltiplicazione delle forze.

Passiamo ora alla generazione delle onde acustiche. Un mezzo fluido può essere compresso: agendo su uno strato del fluido, si produce una variazione locale di densità ρ e di pressione P . Lo strato successivo viene spinto da quello precedente e la perturbazione si propaga. Se lo spostamento delle particelle è lungo la stessa direzione di propagazione dell'onda, la perturbazione è longitudinale.

Se consideriamo un pistone che comprime un gas, il primo strato viene spostato e compresso:

$$\rho \rightarrow \rho + \Delta\rho \quad P \rightarrow P + \Delta P$$

Lo strato successivo viene messo in moto dalla forza trasmessa dal primo e la perturbazione procede. Il moto locale delle particelle ha accelerazione dovuta alla differenza di pressione tra strati adiacenti:

$$\rho \frac{du}{dt} = - \frac{dP}{dx}$$



dove $u(x, t)$ è la velocità locale del fluido.

La continuità di massa impone che, se il fluido si comprime in una regione, la densità varia secondo

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho_0 \frac{du}{dx}$$

dove ρ_0 è la densità di equilibrio.

Le variazioni di pressione e densità sono legate dalla risposta elastica del fluido. Per piccole variazioni si assume una relazione lineare

$$\Delta P = B \frac{\Delta \rho}{\rho_0}$$

dove B è il modulo di comprimibilità del mezzo.

Combinando le tre relazioni:

$$\rho_0 \frac{du}{dt} = -\frac{dP}{dx} \quad \frac{d\rho}{dt} = -\rho_0 \frac{du}{dx} \quad \Delta P = B \frac{\Delta \rho}{\rho_0}$$

si ottiene l'equazione d'onda per la pressione (o per la densità):

$$\frac{d^2 P}{dx^2} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2 P}{dt^2} \quad v = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}}$$

Questa è l'equazione che descrive le onde sonore. La perturbazione longitudinale di densità e pressione si propaga con velocità

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}}$$

che dipende dal mezzo: i liquidi hanno grande B e quindi velocità acustica maggiore dei gas.

Le onde acustiche sono quindi oscillazioni longitudinali di pressione e densità, governate da una equazione d'onda formalmente identica a quella ottenuta per la corda vibrante, ma con grandezze fisiche diverse.

19 Onde acustiche: densità, pressione e spostamento

Consideriamo un fluido contenuto in un tubo di sezione costante S . Ogni grandezza dipenderà da x e t . Lo spostamento delle particelle rispetto alla posizione di equilibrio è $\psi(x, t)$ ed è parallelo alla direzione di propagazione. Assumiamo

$$\left| \frac{d\psi}{dx} \right| \ll 1$$

in modo che le deformazioni locali siano piccole.

Un volumetto iniziale del fluido compreso tra x e $x + dx$ ha volume

$$dV_0 = S dx$$

Dopo una perturbazione, la sua faccia sinistra si sposta di $\psi(x, t)$ e la faccia destra di $\psi(x + dx, t)$. Il nuovo volume è

$$dV = S (\psi(x + dx, t) + dx - \psi(x, t))$$

La variazione di volume è

$$\Delta V = dV - dV_0 = S (\psi(x + dx, t) - \psi(x, t))$$



Dividendo e moltiplicando per dx :

$$\Delta V = S dx \frac{\psi(x+dx, t) - \psi(x, t)}{dx}$$

che nel limite $dx \rightarrow 0$ diventa

$$\Delta V = dV_0 \frac{d\psi}{dx}$$

Dunque il volume finale è

$$dV = dV_0 \left(1 + \frac{d\psi}{dx} \right)$$

La massa contenuta nel volumetto resta costante. La densità iniziale è

$$\rho_0 = \frac{dm}{dV_0}$$

la densità dopo la perturbazione è

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{dm}{dV_0 \left(1 + \frac{d\psi}{dx} \right)}$$

Sviluppando al primo ordine:

$$\rho \simeq \rho_0 \left(1 - \frac{d\psi}{dx} \right)$$

La variazione di densità è quindi

$$\Delta\rho = \rho - \rho_0 = -\rho_0 \frac{d\psi}{dx}$$

Passiamo ora alle forze dovute alla pressione. Il volumetto è soggetto alla pressione sulla faccia sinistra $P(x, t)$ e sulla faccia destra $P(x+dx, t)$. Le forze sulle due facce sono

$$F_A = P(x, t)S \quad F_B = -P(x+dx, t)S$$

La forza risultante è

$$F = F_A + F_B = S (P(x, t) - P(x+dx, t))$$

Nel limite differenziale

$$F = -S dx \frac{dP}{dx}$$

La massa del volumetto è

$$dm = \rho_0 S dx$$

La sua accelerazione è

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}(x, t)$$

Applicando la seconda legge di Newton:

$$\rho_0 S dx \frac{d^2\psi}{dt^2} = -S dx \frac{dP}{dx}$$

Eliminando $S dx$ otteniamo la relazione fondamentale:

$$\rho_0 \frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{dP}{dx}$$

Abbiamo quindi la prima equazione che lega lo spostamento ψ alla pressione P . Per ottenere l'equazione d'onda sarà necessario trovare una relazione che esprima P in funzione di ψ o di ρ . Poiché

$$\Delta\rho = -\rho_0 \frac{d\psi}{dx}$$

Una relazione tra variazione di pressione e variazione di densità chiuderà il sistema.



20 Relazione pressione-densità e chiusura dell'equazione acustica

Dalla lezione precedente avevamo ottenuto la relazione dinamica

$$\rho_0 \frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{dP}{dx}$$

Lega lo spostamento $\psi(x, t)$ alla variazione di pressione $P(x, t)$. Questa equazione però contiene due funzioni incognite. Serve una seconda relazione che colleghi P e ρ .

Dalla variazione di densità avevamo già trovato

$$\Delta\rho = -\rho_0 \frac{d\psi}{dx}$$

Ora vogliamo ricavare come varia la pressione quando varia la densità.

Poiché P non dipende solo da ρ ma anche dalla temperatura T , occorre considerare

$$P = P(\rho, T)$$

La variazione infinitesima di P è

$$dP = \frac{\partial P}{\partial \rho}_T d\rho + \frac{\partial P}{\partial T}_\rho dT$$

Per chiudere il sistema assumiamo che la trasformazione sia isoterma, cioè

$$dT = 0$$

Quindi

$$dP = \frac{\partial P}{\partial \rho}_T d\rho$$

Nell'equilibrio termodinamico il legame tra pressione e densità per un gas ideale può essere dedotto dalla legge dei gas perfetti. In questa fase ci interessa solo il fatto che la derivata parziale

$$\frac{\partial P}{\partial \rho}_T$$

Costante del mezzo. Definiamo allora il modulo di comprimibilità isoterma

$$\beta = \frac{\partial P}{\partial \rho}_T \Big|_{\rho=\rho_0}$$

Sostituendo $d\rho = \Delta\rho$ otteniamo

$$\Delta P = \beta \Delta\rho$$

Usando la relazione precedente

$$\Delta\rho = -\rho_0 \frac{d\psi}{dx}$$

Segue

$$\Delta P = -\beta\rho_0 \frac{d\psi}{dx}$$

Poniamo ora $\Delta P = P(x, t)$, essendo la variazione rispetto alla pressione di equilibrio. Allora

$$P = -\beta\rho_0 \frac{d\psi}{dx}$$



Sostituiamo questa espressione nella relazione dinamica

$$\rho_0 \frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{dP}{dx}$$

Cioè

$$\rho_0 \frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{d}{dx} \left(-\beta \rho_0 \frac{d\psi}{dx} \right)$$

Otteniamo

$$\rho_0 \frac{d^2\psi}{dt^2} = \beta \rho_0 \frac{d^2\psi}{dx^2}$$

Semplificando ρ_0 si arriva a

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \beta \frac{d^2\psi}{dx^2}$$

Questa è l'equazione d'onda di d'Alembert per le onde acustiche in condizioni isoterme:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = v^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} \quad v^2 = \beta$$

Poiché $\beta = \frac{\partial P}{\partial \rho}_T$ possiamo scrivere la velocità dell'onda come

$$v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}}$$

Questa espressione fornisce la velocità delle onde sonore in un fluido isoterma. La struttura dell'equazione è identica a quella trovata per la corda vibrante, ma con diverse grandezze fisiche: il ruolo di T_0 è ora svolto da β e il ruolo della massa per unità di lunghezza è svolto da ρ_0 .

La natura universale di questa equazione è notevole. L'equazione di d'Alembert descrive onde meccaniche sulla corda, onde sonore nei fluidi, onde elettromagnetiche nel vuoto e onde gravitazionali nella relatività generale lineare.

In ogni caso compare la stessa struttura matematica

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = v^2 \frac{d^2\Phi}{dx^2}$$

per una variabile Φ che rappresenta di volta in volta spostamento, pressione, campo elettrico, campo magnetico o variazione metrica dello spazio tempo.

Nelle prossime lezioni vedremo come alla perturbazione di spostamento ψ corrisponda anche una perturbazione di pressione $P(x, t)$ e di densità $\rho(x, t)$, che soddisfano a loro volta la stessa equazione d'onda.

21 Equazioni d'onda per pressione e densità

Partiamo dalla relazione già ricavata tra densità e spostamento

$$\Delta\rho = -\rho_0 \frac{d\psi}{dx}$$

e dalla sua inversa

$$\frac{d\psi}{dx} = -\frac{\Delta\rho}{\rho_0}$$



Inseriamo questa relazione nell'equazione d'onda per ψ

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{\beta}{\rho_0} \frac{d^2\psi}{dx^2}$$

Sostituendo

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{d(\Delta\rho)}{dx}$$

si ottiene

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{\beta}{\rho_0^2} \frac{d(\Delta\rho)}{dx}$$

Deriviamo ora entrambi i membri rispetto a x :

$$\frac{d\left(\frac{d^2\psi}{dt^2}\right)}{dx} = -\frac{\beta}{\rho_0^2} \frac{d^2(\Delta\rho)}{dx^2}$$

Poiché ψ è funzione regolare, possiamo scambiare l'ordine delle derivate

$$\frac{d^2\left(\frac{d\psi}{dx}\right)}{dt^2} = -\frac{\beta}{\rho_0^2} \frac{d^2(\Delta\rho)}{dx^2}$$

Usiamo di nuovo la relazione tra densità e spostamento

$$\frac{d\psi}{dx} = -\frac{\Delta\rho}{\rho_0}$$

Allora

$$\frac{d^2\left(-\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)}{dt^2} = -\frac{\beta}{\rho_0^2} \frac{d^2(\Delta\rho)}{dx^2}$$

Moltiplichiamo per $-\rho_0$:

$$\frac{d^2(\Delta\rho)}{dt^2} = \frac{\beta}{\rho_0} \frac{d^2(\Delta\rho)}{dx^2}$$

Questa è una equazione di d'Alembert per la densità:

$$\frac{d^2(\Delta\rho)}{dt^2} = v^2 \frac{d^2(\Delta\rho)}{dx^2} \quad v^2 = \frac{\beta}{\rho_0}$$

La stessa procedura vale per la pressione. Poiché abbiamo mostrato che

$$\Delta P = \beta \frac{\Delta\rho}{\rho_0}$$

Le variazioni di pressione soddisfano la medesima equazione

$$\frac{d^2(\Delta P)}{dt^2} = v^2 \frac{d^2(\Delta P)}{dx^2}$$

Esistono quindi tre onde distinte ma simultanee:

- Onda di spostamento $\psi(x, t)$
- Onda di densità $\Delta\rho(x, t)$
- Onda di pressione $\Delta P(x, t)$



Tutte si propagano con la stessa velocità

$$v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}}$$

Consideriamo ora una sorgente che impone uno spostamento armonico alla superficie $x = 0$:

$$\psi(0, t) = A \cos(\omega t)$$

Questa condizione produce nel fluido una soluzione ondosa progressiva

$$\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t) \quad k = \frac{\omega}{c}$$

La densità segue da

$$\Delta\rho = -\rho_0 \frac{d\psi}{dx}$$

Quindi

$$\Delta\rho(x, t) = A\rho_0 k \sin(kx - \omega t)$$

La pressione segue da

$$\Delta P = \beta \frac{\Delta\rho}{\rho_0}$$

e dunque

$$\Delta P(x, t) = A\beta k \sin(kx - \omega t)$$

Le onde di pressione e densità sono quindi in fase tra loro, mentre risultano sfasate di $\pi/2$ rispetto all'onda di spostamento. In particolare:

$$\psi \propto \cos(kx - \omega t) \quad \Delta\rho \propto \sin(kx - \omega t) \quad \Delta P \propto \sin(kx - \omega t)$$

L'onda fisicamente osservabile è l'onda di pressione, mentre l'onda di spostamento rappresenta l'oscillazione locale delle particelle del fluido. Ogni particella del mezzo oscilla attorno alla posizione di equilibrio, mentre l'onda si propaga.

Le animazioni mostrano esattamente questo: le particelle oscillano avanti e indietro, ma le zone di compressione e rarefazione si muovono lungo l'asse x con velocità v . Le creste dell'onda di densità sono le regioni più compresse, quelle di pressione sono identiche, e si muovono con la stessa legge.